

Координатный метод

Лекция № 2

Содержание:

Преобразование координат

- линейное и нелинейное преобразования

Аффинное преобразование на плоскости

- Параллельный сдвиг координат
- Растяжение – сжатие осей координат
- Поворот
- Свойства аффинных преобразований

Трехмерное аффинное преобразование

- Сдвиг осей координат на dx , dy , dz
- Растяжение – сжатие на kx , ky , kz
- Повороты.

Преобразование объектов

- Аффинные преобразования объектов на плоскости
- Трехмерное аффинное преобразование объектов

Связь преобразований объектов с преобразованием координат

- Вывод формулы параметрического описания поверхности тора

Проекции

- Аксонометрическая проекция
- Перспективная проекция
- Косоугольная проекция

Отображение в окне

Линейное и нелинейное преобразования

По виду функции различают линейное и нелинейное преобразования.

Если для каждого i , f_i – линейная, то есть

$$f_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{in}k_n + a_{i,n+1},$$

где a_{ij} – константы, то преобразование называется *линейным*,

если $n = N$, то *аффинным*.

Если хотя бы для одного i функция f_i – нелинейна относительно (k_1, k_2, \dots, k_n) , тогда преобразование координат в целом *нелинейно*.

Пример. Нелинейное преобразование координат.

$$\begin{aligned} X &= 3x + 5y, \\ Y &= 4xy + 10y. \end{aligned}$$

Линейное преобразование записывается в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,n} & a_{N,n+1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_N \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аффинное преобразование на плоскости

Зададим некоторую двумерную систему координат. Аффинное преобразование координат:

$$X = Ax + By + C,$$

$$Y = Dx + Ey + F,$$

где A, B, C, D, E, F – константы. Обратное преобразование также является аффинным:

$$x = A'X + B'y + C',$$

$$y = D'X + E'y + F'.$$

Для перехода к матричной форме удобно добавить строку, то есть перейти к однородным координатам:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Если необходимо выполнить два преобразования:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

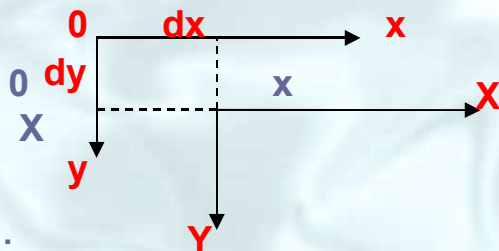
то можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{BA} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{C} = \mathbf{BA} \quad \text{или} \quad c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}.$$

Частные случаи аффинных преобразований

1. Параллельный сдвиг координат

$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X + dx, \\ y = Y + dy; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Растяжение – сжатие осей координат

$$\begin{cases} X = x / k_x, \\ Y = y / k_y; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

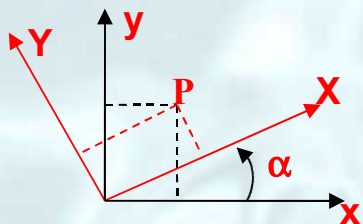


Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X k_x, \\ y = Y k_y; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Частные случаи аффинных преобразований

3. Поворот осей координат



$$\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства аффинных преобразований:

- Любое аффинное преобразование может быть представлено как последовательность из простейших операций: сдвиг, растяжение, поворот.
- Сохраняются прямые линии, параллельность прямых, отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой и отношения площадей фигур.

Трёхмерное аффинное преобразование

$$\begin{cases} X = A x + B y + C z + D, \\ Y = E x + F y + G z + H, \\ Z = K x + L y + M z + N; \end{cases}$$

где A, B, \dots, N – константы.

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аффинные преобразования в трёхмерном пространстве также можно представить в виде последовательности простых операций.

1. Сдвиг осей координат на dx, dy, dz .

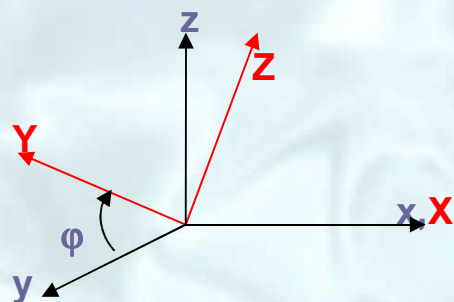
$$\begin{cases} X = x - dx, \\ Y = y - dy, \\ Z = z - dz; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Растяжение – сжатие на k_x, k_y, k_z .

$$\begin{cases} X = x/k_x, \\ Y = y/k_y, \\ Z = z/k_z; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Трёхмерное аффинное преобразование

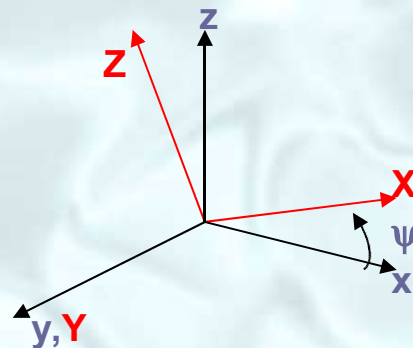
Поворот вокруг оси x на угол φ .



$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y \cos \varphi + z \sin \varphi, \\ Z = -y \sin \varphi + z \cos \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

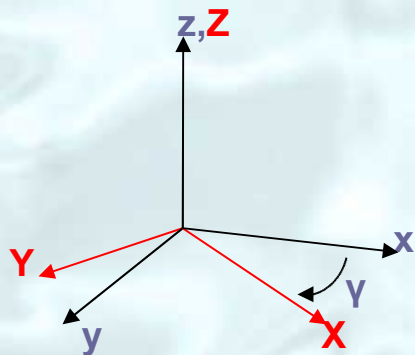
Поворот вокруг оси y на угол ψ .



$$\begin{cases} X = x \cos \psi + z \sin \psi, \\ Y = y, \\ Z = -x \sin \psi + z \cos \psi. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот вокруг оси z на угол γ .



$$\begin{cases} X = x \cos \gamma + y \sin \gamma, \\ Y = -x \sin \gamma + y \cos \gamma, \\ Z = z. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование объектов

Это можно описать так: пусть любая точка объекта имеет координаты (k_1, k_2, \dots, k_n) в n -мерной системе координат.

Тогда преобразование объекта можно рассмотреть как изменение положения точек объекта.

Новое положение - (m_1, m_2, \dots, m_n) : $(m_1, m_2, \dots, m_n) = F(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

F – функция преобразования.

Преобразования классифицируют по типу функции преобразования и типу системы координат.

Преобразование
объектов на плоскости

$$\begin{cases} X = F_x(x, y), \\ Y = F_y(x, y). \end{cases}$$

Преобразование объектов
в трехмерном пространстве

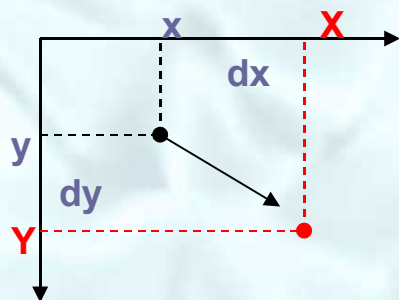
$$\begin{cases} X = F_x(x, y, z), \\ Y = F_y(x, y, z), \\ Z = F_z(x, y, z). \end{cases}$$

Аффинные преобразования объектов на плоскости

Сдвиг

$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F; \end{cases}$$

где A, \dots, F – константы,
 x, y – координаты до преобразования,
 X, Y – координаты после преобразования.



$$\begin{cases} X = x + dx, \\ Y = y + dy; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

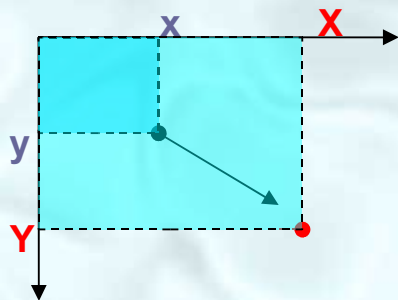
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X - dx, \\ y = Y - dy; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аффинные преобразования объектов на плоскости

Растяжение (сжатие)



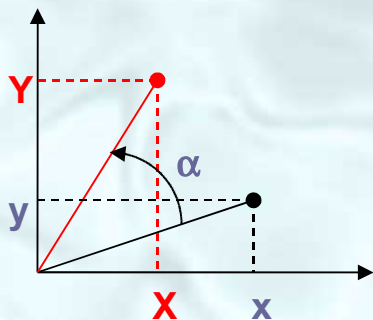
$$\begin{cases} X = x k_x, \\ Y = y k_y; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X / k_x, \\ y = Y / k_y; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аффинные преобразования объектов на плоскости

Поворот вокруг центра координат



$$\begin{cases} X = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \\ Y = x \sin\alpha + y \cos\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X \cos\alpha + Y \sin\alpha, \\ y = -X \sin\alpha + Y \cos\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Трёхмерное аффинное преобразование объектов

$$\begin{cases} X = A x + B y + C z + D, \\ Y = E x + F y + G z + H, \\ Z = K x + L y + M z + N; \end{cases} \quad \text{где } A, B, \dots, N - \text{константы.}$$

Сдвиг на dx, dy, dz .

$$\begin{cases} X = x + dx, \\ Y = y + dy, \\ Z = z + dz; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Растяжение (сжатие) на k_x, k_y, k_z

$$\begin{cases} X = x k_x, \\ Y = y k_y, \\ Z = z k_z; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Трёхмерное аффинное преобразование объектов

Поворот вокруг оси x на угол φ

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y \cos\varphi - z \sin\varphi, \\ Z = y \sin\varphi + z \cos\varphi; \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот вокруг оси y на угол ψ

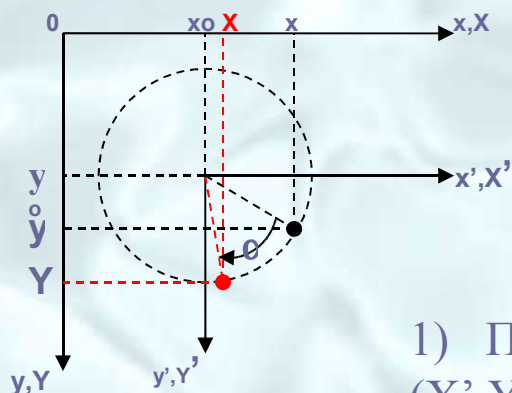
$$\begin{cases} X = x \cos\psi - z \sin\psi, \\ Y = y, \\ Z = x \sin\psi + z \cos\psi; \end{cases} \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поворот вокруг оси z на угол γ

$$\begin{cases} X = x \cos\gamma - y \sin\gamma, \\ Y = x \sin\gamma + y \cos\gamma, \\ Z = z; \end{cases} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Связь преобразований объектов с преобразованием координат

Необходимо повернуть точку (x, y) вокруг точки (x_0, y_0) и получить точку (X, Y) .



1) Вводим систему координат $O'x'y'$ с центром в точке (x_0, y_0) .

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

2) Поворот точек вокруг центра системы координат $O'x'y'$.

$$\begin{cases} X' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ Y' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

1) Преобразование системы координат (X', Y') в (X, Y) посредством сдвига в точку $(0, 0)$.

$$\begin{cases} X = X' + x_0, \\ Y = Y' + y_0 \end{cases}$$

4) Объединяем формулы

$$\begin{cases} X = (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0, \\ Y = (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Сдвиг системы координат на } -x_0, -y_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Поворот на угол } \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Сдвиг сист. координат на } x_0, y_0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & (-x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + x_0) \\ \sin \alpha & \cos \alpha & (-x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha + y_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вывод формулы параметрического описания поверхности тора

Для произвольной точки P необходимо найти (x, y, z) .

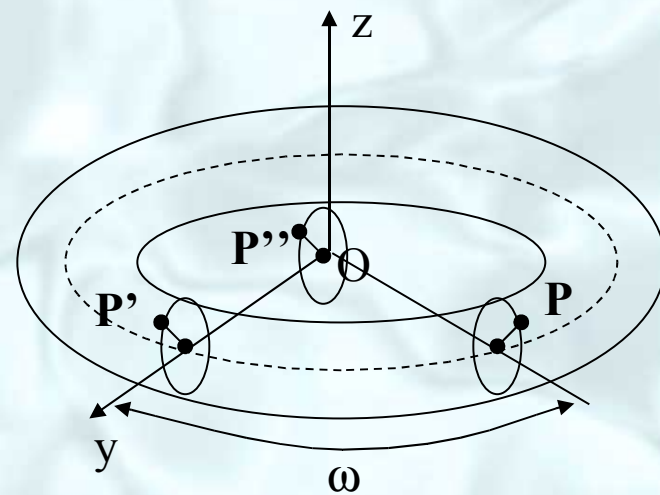
Для поверхности в трехмерном пространстве необходимо задать два параметра:

φ - широта, ω - долгота.

5) Рассмотрим окружность в плоскости Ozy .

Координаты точки P'' с широтой φ :

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = r \cos \varphi, \\ z'' = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{где } r - \text{малый радиус тора}$$



2) Перенос окружности на расстояние R по оси y в плоскости Ozy , получим точку P'

$$\begin{cases} x' = x'' = 0, \\ y' = R + y'' = R + r \cos \varphi, \\ z' = z'' = r \sin \varphi \end{cases}$$

3) Повернем точку P' на угол ω вокруг оси z и получим точку P

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega + y' \sin \omega, \\ y = -x' \sin \omega + y' \cos \omega, \\ z = z' \end{cases} \quad \begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \sin \omega, \\ y = (R + r \cos \varphi) \cos \omega, \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Проекции

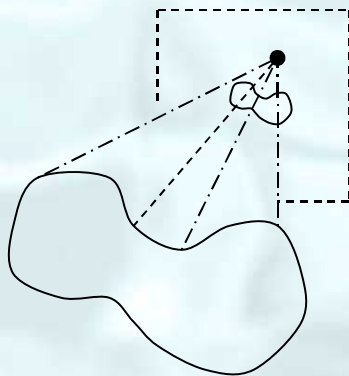
При использовании любых графических устройств обычно используют проекции. Будем рассматривать проекции на плоскость. При отображении устройствами объектов на экран (бумагу) используют две системы координат.

Мировые координаты – описывают истинное значение положения объекта в пространстве.

Экранные координаты – координаты проекции, используемые для графических устройств.

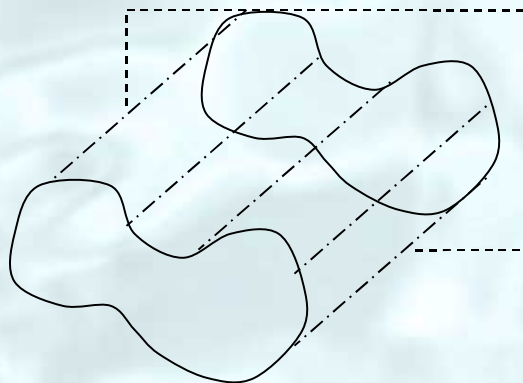
Существует два основных типа проекций:

1) Центральная



Лучи проектирования
исходят из одной точки

2) Параллельная



Лучи проектирования
параллельны

АксонOMETрическая проекция

Разновидность параллельной проекции. Лучи проецирования расположены под прямым углом к плоскости проецирования.

Зададим положение плоскости проецирования с помощью двух углов α и β . Расположим камеру так, чтобы проекция оси z на плоскость проецирования была бы вертикальной прямой:

Рассмотрим преобразование из (x, y, z) в (X, Y, Z) .

1) Поворот системы координат относительно оси z на угол α .

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Поворот системы координат (x', y', z') относительно x' на угол β .

Получим (X, Y, Z) .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Получаем } BA \begin{cases} X = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \\ Y = x \sin\alpha \cos\beta + y \cos\alpha \cos\beta - z \sin\beta, \\ Z = x \sin\alpha \sin\beta + y \cos\alpha \sin\beta + z \cos\beta. \end{cases}$$

Перспективная проекция

Теперь рассмотрим общий случай. Возьмем произвольные углы α, β и повернем систему координат на эти углы.

$$\begin{cases} x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \\ y' = x \sin\alpha \cos\beta + y \cos\alpha \cos\beta - z \sin\beta, \\ z' = x \sin\alpha \sin\beta + y \cos\alpha \sin\beta + z \cos\beta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x'(z_k - z_{пл}) / (z_k - z'), \\ Y = y'(z_k - z_{пл}) / (z_k - z'), \\ Z = z' - z_{пл} \end{cases}$$

Последовательность преобразований координат:

$$(x, y, z) \xrightarrow{\text{поворот}} (x', y', z') \xrightarrow{\text{перспектива}} (X, Y)$$

Преобразование нелинейное, поэтому его нельзя описать одной матрицей коэффициентов-констант для всех объектов схемы (хотя для преобразования координат можно использовать матричную форму).

Свойства перспективной проекции:

- не сохраняется отношение длин и площадей;
- прямые линии изображаются прямыми линиями;
- параллельные прямые изображаются сходящимися в одной точке.

Косоугольная проекция

Камера поднята на высоту h с сохранением вертикального положения плоскости проецирования.

- 1) Выполняем поворот вокруг оси z на угол α ;
- 2) Заменяем z' на y' , а y' на z' ;
- 3) Выполняем сдвиг системы координат вверх на высоту камеры h ;
- 4) В плоскости $(x', y', 0)$ строим перспективную проекцию (точка схода лучей на оси z).

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & h \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Затем:
$$\begin{cases} X = \Pi_x(x', z'), \\ Y = \Pi_y(y', z'); \end{cases}$$

Преимущество данной проекции состоит в том, что сохраняется параллельность вертикальных линий.

Отображение в окне

Поскольку система координат в плоскости проецирования может не совпадать с системой координат устройства отображения, то необходимо выполнять дополнительные преобразования.

Необходимо масштабировать его и переместить: $(X, Y, Z) \Rightarrow (X_э, Y_э, Z_э)$.

Зададим окно $(X_{эmin}, Y_{эmin}) - (X_{эmax}, Y_{эmax})$.

$$\begin{cases} X_э = K X + dx, \\ Y_э = K Y + dy, \\ Z_э = K Z; \end{cases}$$

Такое преобразование сохраняет пропорции объектов благодаря одинаковому коэффициенту сжатия K . Но встает вопрос: как вычислить K, dx, dy ?

$$\begin{cases} X_{эmin} \leq K X_{min} + dx, & (1) \\ Y_{эmin} \leq K Y_{min} + dy, & (2) \\ X_{эmax} \leq K X_{max} + dx, & (3) \\ Y_{эmax} \leq K Y_{max} + dy, & (4) \end{cases}$$

$$(1) + (3): K \leq \frac{X_{эmax} - X_{эmin}}{X_{max} - X_{min}} = K_x$$

$$(2) + (4): K \leq \frac{Y_{эmax} - Y_{эmin}}{Y_{max} - Y_{min}} = K_y$$

Отсюда следует: $K \leq \min \{K_x, K_y\} = K_{min}$.

Отображение в окне

Если K_x или $K_y = \infty$, то его отбрасываем, а если оба, то $K_{\min} = 1$.

Возьмем $K = K_{\min}$. Найдем dx .

$$\text{Из (1): } dx \geq X_{\min} - K * X_{\min} = dx_1$$

$$\text{Из (2): } dx \leq X_{\max} - K * X_{\max} = dx_2$$

Так как $dx_1 \leq dx_2$, то $dx_1 \leq dx \leq dx_2$. Возьмем середину:

$$dx = (dx_1 + dx_2)/2 = (X_{\min} - K * X_{\min} + X_{\max} - K * X_{\max})/2;$$

Аналогично $dy = (dy_1 + dy_2)/2 = (Y_{\min} - K * Y_{\min} + Y_{\max} - K * Y_{\max})/2;$

Для таких dx , dy центр будет в центре окна.

Цепочка преобразований координат от мировых к экранным:

Мировые координаты

(x, y, z)



Видовые
координаты

(X, Y, Z)



Координаты проекции

(X_p, Y_p, Z_p)



Экранные
координаты

$(X_{\varepsilon}, Y_{\varepsilon}, Z_{\varepsilon})$

Аффинные преобразования
(поворот камеры)

Проективное
преобразование

преобразование
(....., сдвиг)