

Гл. 2. ЭЛЕМЕНТЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Понятие булевой функции

Булева (логическая) функция – это функция $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, n – число переменных (аргументов). Таким образом, булева функция, как и ее аргументы, принимает только два значения 0 или 1. Математическая дисциплина, изучающая булевы функции и их свойства называется *булевой алгеброй*.

Каждая комбинация значений переменных называется *набором*. Множество наборов образует область определения булевой функции. Число всевозможных различных наборов значений n переменных булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ равно 2^n (это число различных двоичных векторов длины n).

Из определения булевой функции следует, что для ее задания достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из наборов значений переменных, то есть выписать таблицу. Составленная таким образом таблица называется *таблицей истинности*.

Так как каждый набор можно рассматривать как запись числа в двоичном счислении, то принято располагать наборы в соответствии с естественным порядком следования чисел $0, 1, \dots, 2^n - 1$. Такое упорядочивание наборов позволяет записывать булеву функцию в виде *набора значений функции* (транспонированный правый столбец таблицы истинности).

Количество различных булевых функций n аргументов равно $2^{(2^n)}$ (это число всевозможных расстановок нулей и единиц в столбце с 2^n строками).

Приведем названия и обозначения всех булевых функций двух аргументов (для большинства логических функций имеется несколько названий и обозначений). Эти функции иногда называют *логическими операциями*.

Булевы функции двух аргументов

№	x y	0	0	1	1	Обозначение функции	Название функции
		0	1	0	1		
1	f	0	0	0	0	0	Константа 0
2		0	0	0	1	$x \wedge y, x \& y, x \cdot y, xy$	Конъюнкция, «и»
3		0	0	1	0	$\overline{xy}, x - y$	Запрет «у», отрицание «у»
4		0	0	1	1	x	Тождественный «х», повтор «х»
5		0	1	0	0	$\overline{xy}, y - x$	Запрет «х», отрицание «х»
6		0	1	0	1	y	Тождественный «у», повтор «у»
7		0	1	1	0	$x \oplus y, x + y$	Сложение по mod 2, исключающее «или»
8		0	1	1	1	$x \vee y$	Дизъюнкция, «или»
9		1	0	0	0	$x \downarrow y$	Стрелка Пирса, «не или»
10		1	0	0	1	$x \leftrightarrow y, x \sim y$	Эквиваленция, равнозначность
11		1	0	1	0	$\overline{y}, \neg y$	Отрицание «у», «не»
12		1	0	1	1	$x \leftarrow y$	Обратная импликация
13		1	1	0	0	$\overline{x}, \neg x$	Отрицание «х», «не»
14		1	1	0	1	$x \rightarrow y$	Импликация, логическое следование
15		1	1	1	0	$x / y, x y$	Штрих Шеффера, «не и»
16		1	1	1	1	1	Константа 1

Замечание. Функции 1, 4 (6), 13 (11), 16 можно рассматривать как функции одного аргумента.

Как и в элементарной алгебре, используя «элементарные» функции можно строить формулы. Приведем индуктивное определение формулы. Пусть Λ – некоторое множество булевых функций. Базис индукции: Каждая функция f из Λ называется *формулой над Λ* . Индуктивный переход: Пусть $f_0(x_1, \dots, x_m)$ – функция из Λ и A_1, \dots, A_m – либо формулы над Λ , либо символы переменных. Тогда выражение $f_0(A_1, \dots, A_m)$ – *формула над Λ* .

Исходя из определения, булеву функцию можно задать в виде формулы, которая описывает логическую функцию как суперпозицию других функций. Для каждой логической функции существует бесконечное множество формул, но таблица истинности у всех этих формул одна и та же. С другой стороны, каждой формуле однозначно сопоставляется функция. Если функция f соответствует формуле U , то будем говорить, что *формула U реализует функцию f* . Формулы U

и V будем называть *эквивалентными (равносильными)*, если соответствующие им функции f и g равны (то есть совпадают их таблицы истинности). Равносильные формулы соединяют знаком равенства.

§2. Эквивалентные преобразования

При исследовании логических формул во многих случаях требуются их корректные преобразования, позволяющие получить новые формулы, эквивалентные данным. Корректность преобразований обеспечивается выполнением следующих правил, называемых **ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ**:

1. **Правило подстановки** формулы F вместо переменной x : если все вхождения переменной x в исходном тождестве будут одновременно заменены формулой F , то тождество останется верным.

2. **Правило замены** подформулы: если формула F , описывающая функцию f , содержит F_1 в качестве подформулы, то замена F_1 на эквивалентную ей формулу F_2 не изменит функцию f .

Старшинство операций (операции даны по убыванию приоритетов)

\neg	$/$	\downarrow	$-$	\wedge	\vee	$+$	\rightarrow	\leftrightarrow
--------	-----	--------------	-----	----------	--------	-----	---------------	-------------------

Основные эквивалентные (равносильные) соотношения булевых функций двух переменных

- | | |
|---|--|
| 1. $\overline{x/y} = xy$, | $\overline{xy} = x/y$, |
| 2. $\overline{x \leftrightarrow y} = x + y$, | $\overline{x + y} = x \leftrightarrow y$ |
| 3. $\overline{x \downarrow y} = x \vee y$, | $\overline{x \vee y} = x \downarrow y$ |
| 4. $\overline{x \rightarrow y} = x \bar{y}$, | $\overline{x \rightarrow y} = \bar{x} \vee y$ |
| 5. $x \vee y = x + y + xy$, | 6. $x(y + z) = xy + xz$ |
| 7. $x + y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, | 8. $x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\bar{y} = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$ |
| 9. $x x = \bar{x}$, | 10. $x + x = 0$, |
| 11. $x + 1 = \bar{x}$, | 12. $x + 0 = x$ |

► Для доказательства необходимо построить и сравнить таблицы истинности для левой и правой частей равенств.

ва. ◀

Основные законы (равносильные формулы) булевой алгебры

Законы отрицания		
$\bar{\bar{1}} = 0$	$\bar{\bar{0}} = 1$	$\bar{\bar{x}} = x$
	Законы конъюнкции	Законы дизъюнкции
Идемпотентность	$x \cdot x = x$	$x \vee x = x$
Коммутативность	$xy = yx$	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность	$x(yz) = (xy)z$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
Дистрибутивность	$x(y \vee z) = (xy) \vee (xz)$	$x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$
Законы 0 и 1	$x \cdot 1 = x$ $x \cdot 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$ $x \vee 0 = x$
Законы де-Моргана	$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$
Поглощение	$x(x \vee y) = x$	$x \vee x\bar{y} = x$
Склеивка	$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x$	$xy \vee x\bar{y} = x$
Неполная склеивка		$xy \vee x\bar{y} = xy \vee x\bar{y} \vee x$
Обобщенная склеивка		$xy \vee z\bar{y} = xy \vee z\bar{y} \vee xz$
	Закон «исключающего третьего» $\overline{x \vee \bar{x}} = 1$	Закон «противоречия» $\overline{x \cdot \bar{x}} = 0$

Не все законы независимы друг от друга. Например, закон поглощения может быть выведен из законов единицы и дистрибутивности: $x \vee xy = (x \cdot 1) \vee xy = x(1 \vee y) = x \cdot 1 = x$

В качестве независимой системы законов можно выбрать законы:

- коммутативности,
- ассоциативности,
- дистрибутивности,
- нуля и единицы.

При доказательстве эквивалентности формул применяются два подхода: *аксиоматический* и *конструктивный*. При аксиоматическом подходе используется система аксиом (законов). Все остальные тождества получают через эти законы с использованием эквивалентных преобразований. При конструктивном доказательстве используются таблицы истинности.

Пример. Используя таблицы истинности, доказать тождества $x \vee \bar{x}y = x \vee y$, $x(\bar{x} \vee y) = xy$, (эти тождества также можно отнести к законам поглощения).

x	y	\bar{x}	$\bar{x}y$	$x \vee \bar{x}y$	$x \vee y$	$\bar{x} \vee y$	$x(\bar{x} \vee y)$	xy
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

Пример. Используя эквивалентные преобразования, получить формулу над множеством $\{\wedge, \vee, \neg\}$ для функции $f(x, y, z, p) = y \rightarrow p \cdot x \mid z \vee \bar{y} \leftrightarrow x \leftarrow y + p \vee z$

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, p) &= y \rightarrow p \cdot x \mid z \vee \bar{y} \leftrightarrow x \leftarrow y + p \vee z = \\
 &= \left(y \rightarrow \left((p(x \mid z)) \vee \bar{y} \right) \right) \leftrightarrow \left(x \leftarrow (y + (p \vee z)) \right) = \\
 &= \left(\left(y \rightarrow \left((p(x \mid z)) \vee \bar{y} \right) \right) \left(x \leftarrow (y + (p \vee z)) \right) \right) \vee \\
 &\quad \vee \left(\left(y \rightarrow \left((p(x \mid z)) \vee \bar{y} \right) \right) \overline{\left(x \leftarrow (y + (p \vee z)) \right)} \right) = \\
 &= \left(\left(\bar{y} \vee \left((p(x \mid z)) \vee \bar{y} \right) \right) \left(x \vee \overline{(y + (p \vee z))} \right) \right) \vee \\
 &\quad \vee \left(\left(y \left(\overline{(p(x \mid z)) \vee \bar{y}} \right) \right) \overline{\left(x \leftarrow (y + (p \vee z)) \right)} \right) = \\
 &= \left(\left(\bar{y} \vee \left((p(\overline{xz})) \vee \bar{y} \right) \right) \left(x \vee \overline{(y(p \vee z) \vee \bar{y}(\overline{p \vee z}))} \right) \right) \vee \\
 &\quad \vee \left(\left(y \left(\overline{(p(\overline{xz})) \vee \bar{y}} \right) \right) \overline{\left(x \left(\overline{(y(p \vee z) \vee \bar{y}(\overline{p \vee z}))} \right)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

§3. Полнота систем булевых функций

Система функций $\Lambda = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ называется (функционально) *полной*, если любая булева функция является некоторой суперпозицией этих функций, то есть представима в виде формулы над Λ .

Теорема. Пусть даны две системы булевых функций $\Lambda = (f_1, f_2, \dots)$ и $\Omega = (g_1, g_2, \dots)$, относительно которых известно, что система Λ полна и каждая ее функция выражается в виде формулы над Ω . Тогда система Ω является полной.

Примерами функционально полных систем могут служить следующие системы булевых функций: $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \oplus, 1, 0\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\leftrightarrow, \wedge, \oplus\}$, $\{\leftrightarrow, \vee, \oplus\}$ и другие.

Исходя из этого в булевой алгебре действует следующий принцип:

Принцип суперпозиции. Любая сложная булева функция может быть представлена в виде суперпозиции булевых функций двух аргументов.

§4. Формы представления булевых функций

Каждая булева функция имеет конечное число вхождений переменных. Под *числом вхождений переменной (длиной)* понимается число раз, которое она встречается, с отрицанием или без, в формуле, реализующей эту функцию. *Задача минимизации булевых функций* заключается в том, чтобы получить формулу с наименьшим числом вхождений переменных.

Конъюнкция любого числа переменных, с отрицанием или без, называется *конъюнктой*. Дизъюнкция любого числа переменных, с отрицанием или без, называется *дизъюнктой*.

Конъюнкция любого числа переменных, взятых по одному разу, с отрицанием или без отрицания, называется *элементарным произведением*. Например, $x\bar{y}z$ – элементарное произведение, $x\bar{y}z\bar{p}$ – не является элементарным произведением.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) функции называется такая дизъюнкция нескольких различных элементарных произведений, что таблица истинности ДНФ совпадает с таблицей истинности самой функции. ДНФ может состоять из одного элементарного произведения.

Пример. Получить ДНФ для функции:

$$f(x, y, z, p) = y \rightarrow p \cdot x \mid z \vee \bar{y} \leftrightarrow x \leftarrow y + p \vee z.$$

Мы ранее получили формулу над множеством $\{\wedge, \vee, \neg\}$ для этой функции. В качестве исходной возьмем полученную формулу и воспользуемся законами булевой алгебры.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p) &= \\ &= \left(\left(\bar{y} \vee \left(p \left(\overline{xz} \right) \vee \bar{y} \right) \right) \left(x \vee \left(y \left(p \vee z \right) \vee \bar{y} \left(p \vee z \right) \right) \right) \right) \vee \\ &\quad \vee \left(\left(\bar{y} \vee \left(p \left(\overline{xz} \right) \vee \bar{y} \right) \right) \left(\bar{x} \left(y \left(p \vee z \right) \vee \bar{y} \left(p \vee z \right) \right) \right) \right) = \\ &= \left(\left(\bar{y} \vee \left(p \left(\overline{x \vee z} \right) \vee \bar{y} \right) \right) \left(x \vee \left(y p \vee y z \vee \bar{y} \left(p \vee z \right) \right) \right) \right) \vee \\ &\quad \vee \left(\left(\bar{y} \vee \left(p \left(\overline{xz} \right) \vee \bar{y} \right) \right) \left(\bar{x} \left(y p \vee y z \vee \bar{y} \left(p \vee z \right) \right) \right) \right) = \\ &= \left(\left(\bar{y} \vee p \bar{x} \vee p \bar{z} \right) \left(x \vee y p \vee y z \vee \bar{y} \bar{p} \bar{z} \right) \right) \vee \\ &\quad \vee \left(\left(\bar{y} \vee \left(p \left(\overline{xz} \right) \right) \right) \left(\bar{x} \left(y p \bar{z} \vee \bar{y} p \vee y z \right) \right) \right) = \\ &= \left(\bar{y} x \vee \bar{y} \bar{p} \bar{z} \vee \bar{x} y p \vee \bar{x} y p z \vee x p \bar{z} \vee y p \bar{z} \right) \vee \\ &\quad \vee \left(\left(y p \vee x y z \right) \left(\bar{x} y \bar{p} \bar{z} \vee \bar{x} y p \vee \bar{x} y z \right) \right) = \\ &= \left(\bar{y} x \vee \bar{y} \bar{p} \bar{z} \vee \bar{x} y p \vee x p \bar{z} \vee y p \bar{z} \right) \vee \left(\bar{x} y p \bar{z} \right) = \\ &= \bar{y} x \vee \bar{y} \bar{p} \bar{z} \vee \bar{x} y p \vee x p \bar{z} \vee y p \bar{z} \vee \bar{x} y p \bar{z}. \end{aligned}$$

Рассмотрим способ построения формулы над множеством $\{\wedge, \vee, \neg\}$ для таблично заданной функции, зависящей от n аргументов.

Обозначим $x^\alpha = x\alpha \vee \bar{x}\bar{\alpha}$. Очевидно, что $x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \bar{x}, & \alpha = 0 \end{cases}$ и $x^\alpha = \begin{cases} 1, & x = \alpha \\ 0, & x \neq \alpha \end{cases}$.

Конституентой единицы (K^1) данного набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется конъюнкция всех переменных, образующих этот набор, такая что

$$K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

то есть, если переменная x_i в наборе принимает значение $\alpha_i = 1$, то в конъюнкцию она берется без отрицания, если же в наборе значение переменной $\alpha_i = 0$, то она записывается с отрицанием.

Пример. Пусть $n = 4$, $\alpha = (0, 1, 0, 1)$. Тогда $K_{(0,1,0,1)}^1(x, y, z, t) = \bar{x}y\bar{z}t$.

Если переменные (x_1, \dots, x_n) принимают значения $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, то

$$K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \dots \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\beta_1 = \alpha_1) \text{ и...и } (\beta_n = \alpha_n) \\ 0, & \text{если } (\beta_1 \neq \alpha_1) \text{ или...или } (\beta_n \neq \alpha_n) \end{cases}$$

Так как, если хотя бы один элемент конъюнкции равен 0, то и вся конъюнкция равна 0, следовательно, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n)$, то $K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$. Исходя из этого, справедлива следующая лемма:

Лемма 1. Конституента единицы равна 1 только на одном наборе.

Конституентой нуля (K^0) данного набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется дизъюнкция всех переменных, образующих этот набор, такая что

$$K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}_1^{\alpha_1} \vee \bar{x}_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee \bar{x}_n^{\alpha_n},$$

то есть, если переменная x_i в наборе принимает значение $\alpha_i = 0$, то в дизъюнкцию она берется без отрицания, если же в наборе значение переменной $\alpha_i = 1$, то она записывается с отрицанием.

Пример. Пусть $n = 4$, $\alpha = (0, 1, 0, 1)$. Тогда $K_{(0,1,0,1)}^0(x, y, z, t) = x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}$.

Если переменные (x_1, \dots, x_n) принимают значения $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, то

$$K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \bar{\beta}_1^{\alpha_1} \vee \bar{\beta}_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee \bar{\beta}_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } (\beta_1 = \alpha_1) \text{ и...и } (\beta_n = \alpha_n) \\ 1, & \text{если } (\beta_1 \neq \alpha_1) \text{ или...или } (\beta_n \neq \alpha_n) \end{cases}$$

Так как, если хотя бы один элемент дизъюнкции равен 1, то и вся дизъюнкция равна 1, следовательно, если $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \dots, \beta_n)$, то $K_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 1$. Исходя из этого, справедлива следующая лемма:

Лемма 2. Конституента нуля равна 0 только на одном наборе.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется дизъюнкция конституент единицы тех наборов, на которых функция равна 1:

$$f_{\text{СДНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} K_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^1(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Лемма 3. Любая булева функция, не равная тождественно 0, представима и при том единственным образом в СДНФ.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется конъюнкция конституент нуля тех наборов, на которых функция равна 0:

$$f_{\text{СКНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=0} K_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^0(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Лемма 4. Любая булева функция, не равная тождественно 1, представима и при том единственным образом в СКНФ.

Замечание. Исходя из коммутативности конъюнкции и дизъюнкции, формулы, получаемые перестановкой конъюнкт (дизъюнкт), считаются одной и той же СДНФ (СКНФ).

Леммы 3 и 4 дают алгоритм построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности функции f .

Пример. Построить таблицу истинности для функции, заданной формулой

$$f(x, y, z, p) = y \rightarrow p \cdot x \mid z \vee \bar{y} \leftrightarrow x \leftarrow y + p \vee z.$$

По таблице истинности выписать СДНФ и СКНФ.

► Порядок операций: $f(x, y, z, p) = \left(y \rightarrow \left((p(x \mid z)) \vee \bar{y} \right) \right) \leftrightarrow \left(x \leftarrow (y + (p \vee z)) \right)$.

x	y	z	p	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	f	K^I	K^0
				$x z$	$p \cdot I$	\bar{y}	$II \sim III$	$y \rightarrow IV$	$p \vee z$	$Y+VI$	$x \leftarrow VII$	$V \leftrightarrow VIII$		
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	$\bar{x} \bar{y} z \bar{p}$	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0		$x \vee y \vee z \vee \bar{p}$
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0		$x \vee y \vee \bar{z} \vee p$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0		$x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{p}$
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	$\bar{x} y z \bar{p}$	
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	$\bar{x} y z p$	
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0		$x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee p$
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	$\bar{x} y z p$	
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	$x \bar{y} z \bar{p}$	
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$x \bar{y} z p$	
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$x \bar{y} z \bar{p}$	
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	$x \bar{y} z p$	
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee p$
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	$x y \bar{z} p$	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \hat{z} \vee p$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{p}$

$$f_{\text{СДНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x} \bar{y} z \bar{p} \vee \bar{x} y z \bar{p} \vee \bar{x} y z p \vee x y z p \vee x y z \bar{p} \vee x y z p \vee x y z \bar{p} \vee$$

$$\vee x y z p \vee x y z \bar{p}.$$

$$f_{\text{СКНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x \vee y \vee z \vee \bar{p})(x \vee y \vee \bar{z} \vee p)(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{p})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee p)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee p)$$

$$(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee p)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{p}) \blacktriangleleft$$

Для определения полноты системы используются классы Поста.

Классы Поста

I. Класс функций, сохраняющих нуль (P_0). Булева функция называется *сохраняющей нуль*, если $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

II. Класс функций, сохраняющих единицу (P_1). Булева функция называется *сохраняющей единицу*, если $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

III. Класс самодвойственных функций (S). Булева функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n)$.

Таблица истинности для двойственной функции получается из таблицы для функции f инвертированием (заменой 0 на 1, 1 на 0) столбца функции и его переворачиванием. Столбец функции в таблице истинности самодвойственной функции должен быть антисимметричным относительно середины.

Очевидно, что если найдется набор значений аргументов α , т.ч. $f(\alpha) = f(\overline{\alpha})$, то функция f не является самодвойственной.

Теорема 2. Если функция $\Phi(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_{1_1}, \dots, x_{1_{p_1}}), \dots, f_m(x_{m_1}, \dots, x_{m_{p_m}}))$, то двойственная функция $\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_{1_1}, \dots, x_{1_{p_1}}), \dots, f_m^*(x_{m_1}, \dots, x_{m_{p_m}}))$.

Принцип двойственности. Для получения формулы Λ^* , двойственной к формуле Λ , нужно в формуле Λ заменить все функции, участвующие в ее построении, на двойственные к ним.

Замечание. Так как двойственной к конъюнкции является дизъюнкция, к дизъюнкции – конъюнкция, к 0 – 1, к 1 – 0, а отрицание – самодвойственная функция, то для формулы над множеством $\Lambda = \{0, 1, \wedge, \vee, \neg\}$ принцип двойственности формулируется следующим образом: для получения формулы Λ^* , двойственной к формуле Λ , нужно в формуле Λ всюду заменить 0 на 1, 1 на 0, конъюнкцию на дизъюнкцию, дизъюнкцию на конъюнкцию.

IV. Класс монотонных функций (M). Набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ предшествует набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$: $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, если $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$. Булева функция называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, таких что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, имеет место неравенство $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Замечание. Доказать или опровергнуть монотонность функции можно по таблице истинности.

V. Класс линейных функций (L).

Теорема 3. Любую булеву функцию можно представить в виде полинома Жегалкина, то есть в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n \oplus c_{n+1} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus c_{C_n^2} x_{n-1} x_n \oplus \dots \oplus c_{2^n - 1} x_1 x_2 \dots x_n,$$

где $c_i \in \{0, 1\}$.

► Для доказательства достаточно определить полноту системы $\{\wedge, \oplus, 1, 0\}$ или привести тождества, позволяющие преобразовать произвольную ДНФ в полином Жегалкина:

$$\begin{aligned} x \vee y &= x \oplus y \oplus xy, & x \oplus \overline{x} &= 1, & x \oplus x &= 0, \\ \overline{x} &= x \oplus 1, & x \oplus 0 &= x, & x(y \oplus z) &= xy \oplus xz. \end{aligned}$$

◀

Пример. Приведем полиномы Жегалкина для конstituент 1 функции трех переменных.

x	y	z	Формула конstituенты	Полином Жегалкина
0	0	0	$\overline{x} \overline{y} \overline{z}$	$(x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1$
0	0	1	$\overline{x} \overline{y} z$	$(x \oplus 1)(y \oplus 1)z = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z$

0	1	0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	$(x \oplus 1)y(z \oplus 1) = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y$
0	1	1	$\bar{x} y \bar{z}$	$(x \oplus 1)yz = xyz \oplus yz$
1	0	0	$x \bar{y} \bar{z}$	$x(y \oplus 1)(z \oplus 1) = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x$
1	0	1	$x \bar{y} z$	$x(y \oplus 1)z = xyz \oplus xz$
1	1	0	$x y \bar{z}$	$xy(z \oplus 1) = xyz \oplus xy$
1	1	1	xyz	xyz

Так как $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$ и конъюнкция конститuent единицы разных наборов всегда равна нулю (например, $\bar{x} \bar{y} z \cdot x y z = 0$), то справедлива следующая лемма.

Лемма. Полином Жегалкина можно получить из СДНФ, заменим все \vee на \oplus , а конститuent единицы на эквивалентные формулы над множеством $\{\oplus, \wedge, 1\}$ (см. таблицу).

Еще один способ построения полинома Жегалкина – *метод неопределенных коэффициентов*, который заключается в следующем. Записывается общий вид полинома. Так как число неизвестных коэффициентов совпадает с числом различных наборов аргументов, то, подставляя вместо переменных конкретные значения, получаем систему уравнений.

Пример. $x \vee y = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy = x \oplus y \oplus xy$.

x	y	$x \vee y$
0	0	$0 = a \oplus b \cdot 0 \oplus c \cdot 0 \oplus d \cdot 0 \cdot 0 = a$
0	1	$1 = 0 \oplus b \cdot 0 \oplus c \cdot 1 \oplus d \cdot 0 \cdot 1 = c$
1	0	$1 = 0 \oplus b \cdot 1 \oplus c \cdot 0 \oplus d \cdot 1 \cdot 0 = b$
1	1	$1 = 0 \oplus 1 \cdot 1 \oplus 1 \cdot 1 \oplus d \cdot 1 \cdot 1 = d$

Булева функция называется *линейной*, если она представима линейным полиномом Жегалкина, то есть $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$, иными словами полином Жегалкина не должен содержать произведения переменных ($c_i = 0 \forall i > n$).

Замыканием множества Λ булевых функций называется множество всех логических функций, которые представимы через формулы над множеством Λ .

Класс (множество) логических функций *замкнут*, если он совпадает со своим замыканием.

Классы Поста попарно различны, что видно из следующей таблицы (знак «+» означает, что функция принадлежит соответствующему классу, знак «–» – не принадлежит).

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
\bar{x}	–	–	+	–	+

Замечание. При решении практических задач полезно заполнить нижеследующую таблицу, где по-прежнему знак «+» означает, что функция принадлежит соответствующему классу, знак «–» – не принадлежит.

	T_0	T_1	S	M	L
F_1	+	–
...
f_m

Условием полноты системы является условие наличия знаков «–» во всех столбцах таблицы.

Литература

1. Акимов О.Е. *Дискретная математика. Логика, группы, графы*. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001 г.
2. Ахметова Н.А., Усманова З.М. *Дискретная математика. Функции алгебры логики*. Учебное пособие. Уфа: Уфимский государственный авиационный технический университет, 2000 г.
3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Сборник задач по дискретной математике*. М.: Наука, 1977 г.
4. Гиндикин С.Г. *Алгебра логики в задачах*. М.: Наука, 1972 г.
5. Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов*. С.-П.: Питер, 2001 г.
6. Яблонский С.В. *Введение в дискретную математику*. М.: Высшая школа, 2001 г.