

### ГЛ. 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Понятие комбинаторной задачи не имеет строгого определения. Задачу имеет смысл называть **комбинаторной** (переборной), если ее решение состоит в переборе элементов  $x$  множества  $X$ . Такое определение описывает не саму задачу, а скорее её решение, так как очень большое количество реальных задач – задачи переборные и только для некоторых найдены способы избежать перебора.

**Комбинаторика** - это раздел математики, связанный с методами подсчета числа объектов определенной природы. Рассматриваемые объекты, как правило, являются определенными комбинациями чисел, букв, предметов и т.д.

**Основная задача комбинаторики** - изучение вопросов следующего типа о конечных множествах. Если нас интересует, сколько элементов, принадлежащих конечному множеству, обладает некоторым свойством или совокупностью свойств, то это - *задача пересчета*. Если же при этом интересоваться *списком элементов*, обладающих этим свойством, то приходим к *задаче перечисления*. Если же пересчет приводит к слишком большим числам, что часто случается в комбинаторике, то отказываются от перечисления и только *классифицируют элементы* с помощью какого-либо соотношения - это *задача классификации*.

Если специально не оговорено иное, то все множества в наших рассуждениях будут конечными, т.е. такими, что  $|A| < \infty$ .

#### §1. Основные правила

**Правило суммы:** Если элемент  $a \in A$  можно выбрать  $n$  способами, а элемент  $b \in B$  -  $m$  способами, то выбор элемента  $x \in A \cup B$  можно осуществить  $n + m$  способами.

Иными словами, если удастся разбить все изучаемые объекты на несколько классов, причем каждый объект входит в один и только один класс, то общее число объектов равно сумме чисел объектов во всех классах.

Или, иначе, если все объекты делятся на  $k$  взаимоисключающих типов, причем имеется  $n_1$  объектов 1-го типа,  $n_2$  объекта 2-го типа, ...,  $n_k$  объектов  $k$ -го типа, то общее число объектов есть  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

**Пример.** Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой - 40 различных книг (и нет таких, как на первой полке), то выбрать одну книгу из стоящих на этих полках можно  $30+40=70$  способами.

**Правило умножения (основное правило комбинаторики):** Если элемент  $a \in A$  можно выбрать  $n$  способами, и если после каждого такого выбора элемент  $b \in B$  можно выбрать  $m$  способами, то выбор пары  $(a, b) \in A \times B$  в указанном порядке можно осуществить  $n \cdot m$  способами.

Иными словами, пусть нужно установить, сколькими способами можно осуществить некоторое действие. Предположим также, что удалось разбить это действие на две части, причём первую часть можно осуществить  $n$  способами, а вторую часть -  $m$  способами. Тогда очевидно, что всё действие целиком можно осуществить  $n \cdot m$  способами.

С помощью метода математической индукции это правило обобщается на любое конечное число множеств: если имеется  $k$  конечных множеств  $A_1, A_2, \dots, A_k$  то число всевозможных наборов  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , где  $a_i \in A_i$ , равно  $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$ .

**Пример.** Из города А в город В ведет 6 дорог, из города В в город В - 4 дороги, и больше никаких дорог из этих городов не выходит. Сколькими способами можно проехать из города А в город В? Всего получаем  $6 \cdot 4 = 24$  способа проезда.

**Пример.** Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево? Цифра разряда десятков тысяч и цифра разряда единиц должны быть одинаковыми, не равными 0 (9 возможностей); цифра разряда тысяч и разряда десятков может быть любой (10 возможностей); цифра разряда сотен может быть любой (10 возможностей). Итак, согласно правилу произведения, всего искомым чисел  $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ .

#### §2. Сочетания, размещения, перестановки

Набор элементов  $a_{i1}, \dots, a_{ik}$  из множества  $M = \{a_1, \dots, a_n\}$  будем называть **выборкой (комбинацией)** объема  $k$  из  $n$  элементов.

Каждая из основных комбинаторных формул определяет общее число различных выборок, которые можно получить, выбирая наудачу  $k$  элементов из  $n$  различных элементов исходного множества  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Необходимо четко различать две принципиально отличные схемы выбора: с возвращением и без возвращения элементов. **Схема выбора с возвращением (с повторением)** строится тогда, если набор элементов (выборка) в принципе может содержать одинаковые элементы. Если же выборка не может содержать одинаковые элементы, то имеет место **схема выбора без возвращения (без повторения)**.

Кроме этого следует еще различать упорядоченные и неупорядоченные выборки. Выборка считается **упорядоченной**, если существует порядок следования элементов внутри нее. В противном случае выборка считается **неупорядоченной**. Упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными. Если упорядоченность набора не следует непосредственно из условия задачи, необходимо мысленно поменять местами любые два элемента набора и если по смыслу задачи набор не изменился, то он считается неупорядоченным.

ВЫБОРКИ объема $k$	<b>Размещения</b> (упорядоченные – важен <i>состав</i> и <i>порядок</i> )	<b>Сочетания</b> (неупорядоченные – важен только <i>состав</i> )
<b>Без повторений</b> (выбираются из $n$ различных элементов)	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$ $n \geq k > 0.$ <b>Перестановки</b> ( $k = n$ ) $P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$ $n \geq k > 0.$
<b>С повторениями</b> (выбираются из элементов $n$ различных сортов)	$\overline{A}_n^k = n^k$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

1. Выборки, отличающиеся друг от друга *составом* элементов или их *порядком*, каждая из которых содержит  $k$  элементов, взятых из  $n$  различных элементов, называются **размещениями без повторений** из  $n$  элементов по  $k$ .

2. Выборки, отличающиеся друг от друга *составом* элементов, каждая из которых содержит  $k$  элементов, взятых из  $n$  различных элементов, называются **сочетаниями без повторений** из  $n$  элементов по  $k$ . Порядок следования элементов не учитывается.

3, 4. Если при составлении размещений и сочетаний  $k$  элементов выбирать не из  $n$  различных элементов, а из совокупности, содержащей элементы  $n$  различных *сорт*ов, то получим выборки, в которых элементы могут повторяться, т.е. **размещения и сочетания с повторениями**.

5. Выборки, каждая из которых содержит  $n$  различных элементов, взятых в определенном порядке, называются **перестановками** из  $n$  элементов. Это частный случай размещений без повторений, когда  $k = n$ .

6. Выборки, каждая из которых содержит  $n_1$  элемент 1-го типа,  $n_2$  элемента 2-го типа, ...,  $n_m$  элементов  $m$ -ного типа, взятых в определенном порядке, называются **перестановками с повторениями** из  $n = n_1 + \dots + n_m$  элементов.

#### **Размещения без повторений**

Сколькими способами можно выбрать  $k$  объектов из множества, содержащего  $n$  объектов, причем  $k$  объектов должны выбираться в определенном порядке. Другими словами, сколькими способами можно выбрать и разместить по  $k$  различным местам  $k$  из  $n$  различных предметов?

Число размещений без повторений из  $n$  объектов по  $k$  обозначают  $A_n^k$ .  $A$  – первая буква французского слова *arrangement*, что означает размещение, приведение в порядок.

Существует  $n$  способов выбора первого объекта. После того как он выбран, остается  $(n-1)$  способ для выбора второго объекта. После выбора первого и второго объектов остается  $(n-2)$  способа для выбора третьего объекта, и вообще после выбора объектов от первого до  $(k-1)$ -го остается  $(n-k+1)$  способ для выбора  $k$ -го объекта. По правилу произведения имеем:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k > 0.$$

**Пример.** На втором курсе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных занятий? Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у четырнадцатиэлементного множества. Следовательно, число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5, т.е. равно  $A_{14}^5 = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 240240$ .

#### **Перестановки без повторений**

Если в размещениях без повторений рассмотреть случай  $k = n$ , то мы получим размещения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов. Другими словами, возникает вопрос: *сколькими способами можно переставить  $n$  различных предметов, расположенных на  $n$  различных местах?*

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают через  $P_n$ .  $P$  – первая буква французского слова *permutation* – перестановка.

В общем случае число перестановок из  $n$  элементов  $P_n = A_n^n$ , и, следовательно, его можно найти по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n!$$

**Пример.** Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если из этих чисел ни одна не повторяется.  $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ , всего можно составить 120 указанных чисел.

#### **Сочетания без повторений**

В размещениях из  $n$  элементов по  $k$ , изучаемые выборки отличаются друг от друга либо элементами, либо их порядком, либо и тем и другим. Если мы не будем различать выборки, отличающиеся друг от друга только порядком, то придем к комбинациям, различающимся только элементами. Итак, *сколькими способами можно выбрать  $k$  объектов из множества, содержащего  $n$  объектов.*

Число всех сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  обозначается символом  $C_n^k$ .  $C$  – первая буква французского слова *combinaison* – сочетание.

Из определения сочетаний следует, что они отличаются друг от друга только элементами. Выбрать  $k$  из  $n$  разных предметов можно  $C_n^k$  способами, и в каждом из выбранных сочетаний имеется  $k!$  возможностей упорядочить  $k$  предметов этого сочетания. Поэтому, согласно правилу произведения, имеется  $k!$  возможностей выбрать и разместить по  $k$  разным местам  $k$  разных предметов, то есть  $A_n^k = k!C_n^k$ .

Откуда следует, что число сочетаний из  $n$  разных предметов по  $k$  в  $k!$  раз меньше числа размещений из  $n$  по  $k$ , то есть

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формула для вычисления  $C_n^k$  при любом целом  $n \geq 0$  и при любом целом  $0 \leq k \leq n$  (считается, что  $C_n^k$  имеет комбинаторный смысл только при этих условиях):

**Пример.** Из группы в 25 человек нужно выделить 3 человека на дежурство. Сколькими различными способами это можно сделать?  $C_{25}^3 = \frac{25!}{3! 22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 25 \cdot 23 \cdot 4 = 2300$

### Размещения с повторениями

Сколькими способами можно выбрать и разместить по  $k$  различным местам  $k$  предметов из совокупности предметов  $n$  различных сортов?

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Первый элемент может быть выбран  $n$  способами, второй элемент также может быть выбран  $n$  способами и так далее,  $m$ -й элемент также может быть выбран  $n$  способами. По принципу произведения получаем  $n^k$ .

Размещения с повторениями можно рассматривать и в случае  $k > n$ .

**Пример.** Сколько шестизначных номеров можно составить из десяти цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?  $10^6$ .

### Сочетания с повторениями

Сколькими способами можно выбрать  $k$  предметов из совокупности предметов  $n$  различных сортов? Очевидно, что любой предмет может входить в комбинацию некоторое число раз (не большее  $k$ ).

Сочетания с повторениями можно рассматривать и в случае  $k > n$ .

Число возможных различных сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  принято обозначать  $\overline{C}_n^k$ , и оно может быть найдено по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

**Пример.** В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Покупатель берет 4 пирожных. Сколькими способами он может это сделать? (Предполагается, что пирожных каждого вида  $\geq 4$ ).

$$\text{Число способов будет } C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210.$$

### Перестановки с повторениями

При перестановке букв в слове «толпа» получается  $P_5=5!=120$  «слов». Если же переставлять буквы в слове «топот», то получится меньше различных «слов» потому, что ни перестановка двух букв «т», ни перестановка двух букв «о» не изменяют «слова». Мы имеем здесь дело с перестановками с повторениями.

При решении различных задач возникает вопрос о том, сколькими способами можно переставить  $n$  предметов  $m$  различных типов, каждого типа соответственно по  $n_1, n_2, \dots, n_m$  одинаковых предметов, расположенных на  $n$  различных местах?

Число всех таких перестановок с повторениями принято обозначать  $P_n(n_1, n_2, \dots, n_m)$  и оно может быть найдено по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{m-1}}^{n_m}.$$

**Пример.** Сколькими способами можно расположить в ряд две зеленые и четыре красные лампочки?  $P_6(2, 4) = \frac{6!}{2!4!} = 15$