

Гл. 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§1. Понятие множества

Один из создателей теории множеств **Георг Кантор** (1845-1918 г.г.) сказал: «*Множество есть многое, мыслимое нами как единое*». **Н. Бурбаки** (псевдоним группы французских математиков) трактует понятие множества так: «*множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой и с элементами других множеств*».

Строгого определения множества нет, так как это понятие, из которого выводятся многие понятия математики, тогда как оно не выводится из других понятий и не определяется. Понятие множества столь же первично как понятие точки или числа. Синонимами слова «множество» можно считать такие слова как «совокупность», «коллекция», «семейство», «собрание».

В математике понятие **множество** используется для описания совокупности предметов или объектов. При этом предполагается, что предметы (объекты) данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов (объектов), не входящих в эту совокупность.

Пример. Следующие совокупности объектов являются множествами: множество деревьев в лесу, множество целых чисел, множество корней уравнения $x^2 + 2x + c = 0$.

Объекты, из которых составлено множество, называются **элементами** данного множества. В этом случае записывают $x \in M$, где x элемент множества M (запись $x \notin M$ означает, что объект x не принадлежит множеству объектов M). Нет никаких ограничений на природу элементов, составляющих множество.

Множества обозначают большими буквами, например A, B, C , а элементы – маленькими буквами, например, a, b, c .

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами - **семейство**. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента $\{a\}$.

Множество считается **определенным**, если указаны все его элементы. Для того, чтобы определить множество, имеющее конечное число элементов (такие множества называются конечными), достаточно перечислить все его элементы в произвольном порядке.

Однако вышеприведенный способ не подходит, если элементов будет много или бесконечно много, и тогда множество определяется с помощью общего свойства, которому должны удовлетворять все элементы определяемого множества. Если нужно символически записать фразу «множество X состоит из элементов x , обладающих свойством P », то принято писать: $X = \{x: P(x)\}$. Вместо двоеточия можно использовать вертикальную черту. В такой записи слева от вертикальной черты задается **вид элемента** (единичный элемент, пара элементов, множество, цепочка символов и.д.), а справа – **характеристическое свойство**.

Пример. Совокупность $\{1,2,3,4,5,6\}$ является множеством и оно неотлично от множества $\{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$, поскольку порядок записи элементов не играет никакой роли. Совокупность $\{1,2,3,1,3,5\}$ множеством не является - цифра 3 повторяется дважды.

Пример. Пусть N – множество натуральных чисел и множество $Y = \{y: y=2^x, x \in N\}$ определяется с помощью N . Тогда элемент $2 \in Y$, элемент $3 \notin Y$.

Множество, имеющее конечное число элементов, называется **конечным**. Множество называется **бесконечным**, если оно состоит из бесконечного числа элементов. Множество, в котором нет ни одного элемента, называют **пустым** множеством. Пустые множества обозначаются знаком \emptyset .

Пример. Рассмотрим множество треугольников, длины сторон которых равны 1 см, 2 см, 5 см. Из геометрии известно, что треугольника с такими длинами сторон не существует, то есть определенное множество не содержит ни одного элемента.

Пример. Множество корней уравнения $\sin(x) = 2$ является пустым.

Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется универсальным или **универсумом** и обозначается \mathcal{U} .

Множества X и Y называются **равными** (или совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств X и Y будет обозначаться через $X = Y$, а неравенство $X \neq Y$.

Пример. Множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ содержит те же самые элементы (числа 2 и 3), что и множество простых чисел, меньших пяти. Эти два множества равны.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B , говорят, что множество A является **подмножеством** множества B , и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть **собственное подмножество** B , $A \subset B$. Если A не является собственным подмножеством B , то записывают $A \not\subset B$. Не надо смешивать **отношение принадлежности** « \in » и **отношение включения** « \subseteq ».

Подмножеством множества X считают также пустое множество и само множество X ; их называют **несобственными подмножествами**.

Пример. Пусть дано произвольное множество, состоящее из трех элементов a, b и c . Найдем все его подмножества. Это будут: пустое множество; множества, содержащие по одному элементу $\{a\}, \{b\}, \{c\}$; множества, содержащие по два элемента: $\{a, b\}; \{b, c\}; \{a, c\}$; само множество $\{a, b, c\}$.

Множество всех подмножеств множества X называется **булеаном** и обозначается $P(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$. Если множество состоит из n элементов, то число всех его подмножеств равно 2^n .

Пример. Булеаном множества $A = \{a, b, c\}$ будет множество

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

§2. Операции над множествами

1. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример. Пусть $A = \{4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

Пример. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \dots\}, B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \cup B$ множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$.

Пример. Объединение множества положительных четных чисел и множества положительных нечетных чисел есть множество натуральных чисел.

Пример. Если X – множество целых чисел от 0 до 100, а Y – множество целых чисел от 200 до 1000, то элементами множества $Z = X \cup Y$ будут целые числа от 0 до 100 и от 200 до 1000.

2. Множество Z , состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству X и множеству Y , называется **пересечением** множеств X и Y :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Пример.. Если X – множество чисел от 0 до 500, а Y – множество чисел, кратных 10, то элементами множества $Z (Z = X \cap Y)$ являются числа 10, 20, 30, ..., 110, 120, 130 ... 430, 440, ..., 500.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Пример. Пересечение множества четных чисел с множеством нечетных чисел пусто.

Пересечение любого множества X с пустым множеством есть пустое множество: $X \cap \emptyset = \emptyset$.

Объединение или пересечение некоторой совокупности (более двух) множеств может быть записано следующим образом:

а) $\bigcup_{X \in Y} \left(\bigcap_{X \in Y} X \right)$ - объединение (пересечение) всех множеств, являющихся элементами множества Y ;

б) $\bigcup_{i \in I} X_i \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)$ - объединение (пересечение) множеств X_i , где индекс i пробегает все значения множества I ;

в) $\bigcup_{i=1}^k X_i \left(\bigcap_{i=1}^k X_i \right)$ - объединение (пересечение) множеств X_i , где индекс i пробегает все значения от 1 до k ;

г) $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \right)$ - объединение (пересечение) бесконечного количества множеств.

3. **Разностью** множеств X и Y называется множество Z , состоящее из всех тех элементов множества X , которые не принадлежат множеству Y :

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}.$$

Разность: 1) строго двухместна; 2) не коммутативна, то есть $X \setminus Y \neq Y \setminus X$.

4. **Симметрической разностью** множеств X и Y называется множество Z , состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат только одному из множеств X, Y :

$$X + Y = \{x \mid (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \notin X \wedge x \in Y)\}.$$

5. **Дополнением** к множеству X называется множество, состоящее из всех тех элементов универсума \mathcal{A} , которые не принадлежат множеству X :

$$\bar{X} = \mathcal{A} \setminus X.$$

Пример. Пусть A – множество четных натуральных чисел. Тогда \mathcal{A} – множество всех натуральных чисел и \bar{A} – множество нечетных натуральных чисел.

Старшинство операций (по убыванию приоритетов):

-	\	∩	∪	+
---	---	---	---	---

Для доказательств отношений множеств можно использовать следующие обозначения:

- символ (\Rightarrow) в выражениях типа $X \Rightarrow Y$ означает, что «если справедливо X , то справедливо Y »;
- символ (\Leftrightarrow) будет означать «тогда и только тогда, когда», «если и только если»;
- символы (**df**) заменяют слово «определение».

Пример. Доказать, что если $\bar{X} \subset \bar{Y}$, то $X \supset Y$. Доказательство: $\forall x \in Y \stackrel{df}{\Rightarrow} x \notin \bar{Y} \stackrel{\text{m.k. } \bar{X} \subset \bar{Y}}{\Rightarrow} x \notin \bar{X} \stackrel{df}{\Rightarrow} x \in X$.

§3. Диаграммы Эйлера - Венна

Операции множеств и связанные с ними соотношения представляются наглядно с помощью **диаграмм Эйлера-Венна**, названных по имени русского математика *Леонарда Эйлера* (1707–1783 г.г.) и английского логика *Джона Венна* (1834–1923 г.г.). На этих диаграммах любые множества изображаются кругами, пересекающимися друг друга, исходя из того, что внутренними точками круга изображаются элементы множества. Общей частью двух кругов, пересекающихся друг друга, представляются возможные общие элементы двух множеств. Универсальное множество изображается в виде прямоугольника.

Существует историческая байка, связанная с применением диаграмм Эйлера-Венна. Аксель Иванович Берг - адмирал и академик, человек со взрывным характером, был одним из первых пропагандистов кибернетики в СССР, когда она еще официально считалась «продажной девкой капитализма». Дискретную математику тогда в технических вузах не изучали из-за полной ее практической бесполезности, а кибернетика уже начинала ею робко пользоваться. Во время беседы с одним «журналистом по научной тематике», который утверждал, что теория множеств не только не нужна, но и не понятна простому советскому инженеру, Берг прервал беседу и приказал своему шоферу отвезти их в ближайший детский садик. В детском садике ребяташки играли в большом песочнике. Других развлечений в послевоенных садиках было мало. Берг нарисовал в песочнике два больших частично пересекавшихся круга, как это делают со свадебными кольцами на открытках и машинах. (Для тех, кто со свадьбами в жизни не сталкивался, скажем, что с похожим перехлестом рисуют олимпийские кольца). Далее он сказал: «Пусть в левый круг встанут все, кто любит манную кашу, а в правый – все, кто любит сливовый кисель!». Дети были горазды поесть (послевоенное время голодное), поэтому никто не остался равнодушно стоять в стороне и все забежали в нарисованные круги. Объединение всех этих маленьких сладкоеежек и есть операция объединения теории множеств. Но, поскольку почти все дети встали в то место, где круги наложились друг на друга, из-за любви к каше и киселю одновременно, то тем самым продемонстрировали понимание физического смысла операции пересечения двух множеств. «Ну вот! Не знаю как инженеры, а дети понимают смысл операций над множествами!», – сказал Берг... Кстати, здесь роль универсума играл весь песочник. То, что нарисовал на песке Берг, и есть диаграммы Эйлера-Венна (рис.1). А то, что находилось на песке за пределами каждого из кругов, было дополнением соответствующего множества, то есть множеством элементов универсума, не принадлежащих к числу любителей данного кушанья (там находились Берг с журналистом).

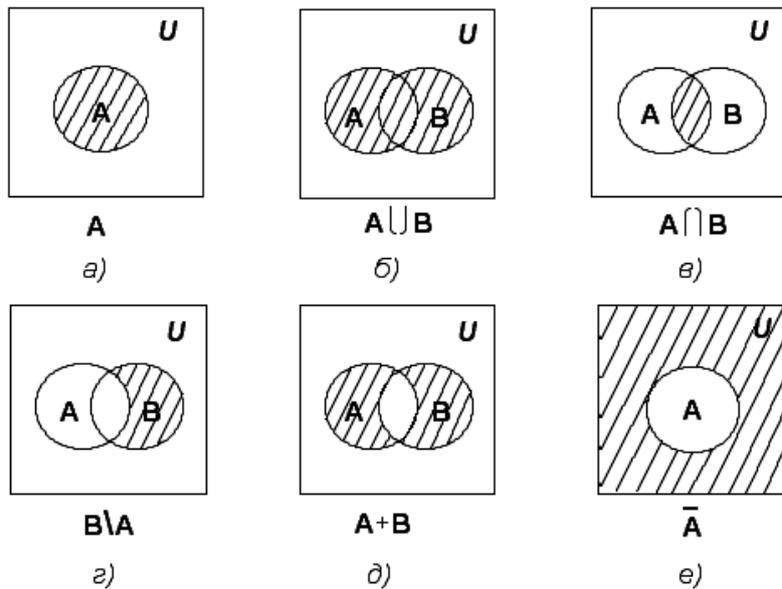


Рис.1. Примеры диаграмм Эйлера-Венна.

Пример. Если рассмотреть внимательно любую студенческую группу, то объединение множества отличников и активистов даст множество под названием «слава группы».

Принципиальное отличие объединения множеств от школьного сложения не только в том, что студенты - это не числа и мы их не пересчитываем, но и в том, что студенты, которые одновременно отличники и активисты, будут учтены один раз. Так что запросто может оказаться, что отличников четыре, а активистов двадцать, но их объединение под названием «слава группы» будет содержать всего двадцать два студента. Ясно, что пересечение этих множеств даст двух студентов, которые одновременно и отличники и активисты. Они, скорее всего, девушки, да еще и красавицы, но красота не использовалась здесь в качестве характеристики, по которой выделялись элементы этих множеств.

§4. Основные законы операций над множествами

1. **Коммутативный закон.** $X \cup Y = Y \cup X$; $X \cap Y = Y \cap X$.

2. **Ассоциативный закон.** $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$; $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

3. **Дистрибутивный закон.**

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z); \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

4. **Закон поглощения.**

$$X \cap (X \cup Y) = X;$$

$$X \cup (X \cap Y) = X.$$

5. **Закон идемпотентности.**

$$X \cup X = X;$$

$$X \cap X = X.$$

6. **Закон де Моргана:**

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y};$$

$$\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}.$$

7. **Законы пустого и универсального множеств.**

$$X \cup \emptyset = X; \quad X \cap \emptyset = \emptyset; \quad X \cap \bar{X} = \emptyset;$$

$$X \cup \mathfrak{A} = \mathfrak{A}; \quad X \cap \mathfrak{A} = X; \quad X \cup \bar{X} = \mathfrak{A};$$

$$\bar{\bar{X}} = X; \quad \bar{\emptyset} = \mathfrak{A}.$$

8. **Закон двойного отрицания** $\bar{\bar{X}} = X$.

9. $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$.

Чтобы доказать некоторое тождество $A = B$, нужно доказать, что, во-первых, если $x \in A$, то $x \in B$ и, во-вторых, если $x \in B$, то $x \in A$.

Пример. Докажем свойство дистрибутивности для объединения:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Решение. 1. Сначала предположим, что некоторый элемент x принадлежит левой части тождества, т.е. $x \in A \cup (B \cap C)$, и докажем, что x принадлежит правой части, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Действительно, пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда либо $x \in A$, либо $x \in B \cap C$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

Пусть $x \in A$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ (это верно для любых множеств B и C). Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \notin A$, то $x \in B \cap C$. Этот случай рассмотрите самостоятельно.

2. Предположим, что некоторый элемент x принадлежит правой части тождества, т.е. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, и докажем, что x принадлежит левой части, т.е. $x \in A \cup (B \cap C)$. Действительно, пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$, и одновременно $x \in A \cup C$. Если $x \in A \cup B$, то либо $x \in A$, либо $x \in B$, если $x \in A \cup C$, то либо $x \in A$, либо $x \in C$. Пусть $x \in A$, Тогда $x \in A \cup (B \cap C)$ и утверждение доказано. Если $x \notin A$, то одновременно должны выполняться условия $x \in B$ и $x \in C$, т.е. $x \in B \cap C$. Но тогда $x \in B \cap C$ и $x \in A \cup (B \cap C)$, что также доказывает наше утверждение.

Пример. Доказать тождество $(A \cup B) \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Решение. 1. Преобразуем левую часть тождества: $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \bar{B}$.

2. Используем закон дистрибутивности: $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{B}$.

3. Используем закон исключенного третьего: $B \cap \bar{B} = \emptyset$.

4. Получим $A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{B} = A \cap \bar{B} \cup \emptyset$.

5. Используем свойство пустого множества: $A \cap \bar{B} \cup \emptyset = A \cap \bar{B}$. Тождество доказано.

Пример. Доказать тождество: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Решение. 1. Множества, стоящие в левой и правой частях тождества, изобразим с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 2).

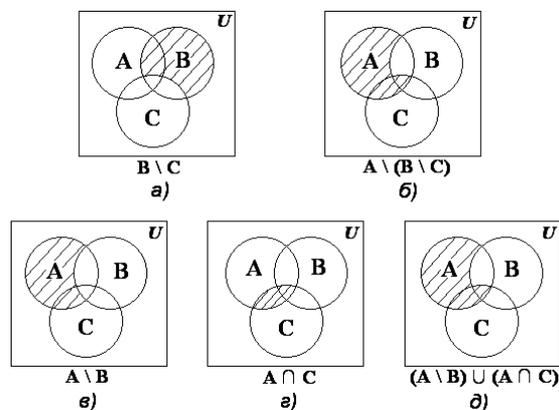


Рис. 2. Доказательство тождества с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Рис. 2 б) и рис. 2 г) иллюстрируют равенство множеств $A \setminus (B \setminus C)$ и $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

2. Докажем тождество из нашего примера, воспользовавшись законами: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bar{A}} = A$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, получим:

$$A \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{(B \setminus C)} = A \cap \overline{B \cap \bar{C}} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{\bar{C}}) = A \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Законы алгебры множеств можно также использовать для упрощения формул.

Пример. Упростить выражение: $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$.

Решение.

1. Используя закон коммутативности, поменяем местами вторую и третью скобки:

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B).$$

2. Применим закон расщепления для первой и второй скобок: $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap (\bar{A} \cup B)$.

3. Воспользуемся законом дистрибутивности: $A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap \bar{A} \cup A \cap B$.

4. Используем закон исключенного третьего: $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

5. Получим: $A \cap \bar{A} \cup A \cap B = \emptyset \cup A \cap B$.

6. Используем свойство пустого множества: $\emptyset \cup A \cap B = A \cap B$.

7. Результат: $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \cap B$.

§5. Мощность множества

Для любого конечного множества A через $|A|$ обозначим число его элементов – **мощность** множества A .

Пример. Ранее мы рассматривали множество всех подмножеств данного множества A , которое называется булеаном и обозначается $P(A)$. Множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов. Таким образом, $|P(A)| = 2^n$.

Рассмотрим задачу определения мощности объединения n конечных множеств. Пусть $n = 2$ и A и B – два пересекающихся множества. Докажем с помощью диаграммы Эйлера – Венна следующее соотношение:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

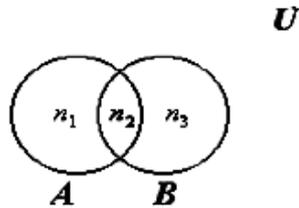


Рис. 3. Мощности соответствующих подмножеств: n_1, n_2, n_3 .

Из рис. 3 видим, что $|A \cup B| = n_1 + n_2 + n_3$; $|A| = n_1 + n_2$; $|B| = n_2 + n_3$; $|A \cap B| = n_2$. Очевидно, что $n_1 + n_2 + n_3 = (n_1 + n_2) + (n_2 + n_3) - n_2$, что и доказывает формулу.

Данная формула справедлива и для случая, если множества A и B не пересекаются:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Пусть $n = 3$ и A, B и C – три пересекающихся множества. В этом случае справедливо следующее соотношение:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

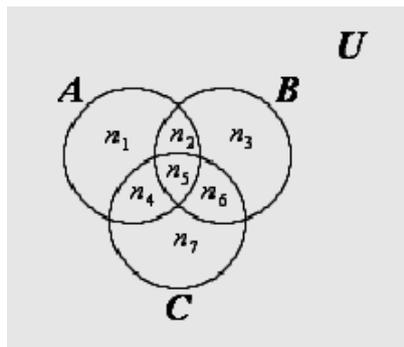


Рис. 4. Мощности соответствующих подмножеств:
 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7$

Из рис. 2.4 видим, что $|A \cup B \cup C| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7$; $|A| = n_1 + n_2 + n_4 + n_5$; $|B| = n_2 + n_3 + n_5 + n_6$; $|C| = n_4 + n_5 + n_6 + n_7$; $|A \cap B| = n_2 + n_5$; $|A \cap C| = n_4 + n_5$; $|B \cap C| = n_5 + n_6$; $|A \cap B \cap C| = n_5$. Очевидно, что $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = (n_1 + n_2 + n_4 + n_5) + (n_2 + n_3 + n_5 + n_6) + (n_4 + n_5 + n_6 + n_7) - (n_2 + n_5) - (n_4 + n_5) - (n_5 + n_6) + n_5$, что и доказывает требуемую формулу.

Эта формула справедлива и для случая, если множества A, B и C попарно не пересекаются. В этом случае

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|.$$

В общем случае мощность объединения n множеств определяется по формуле:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|.$$

Эта формула выводится индукцией по n .

Если множества A_i попарно не пересекаются, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то получим частный случай формулы:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

В общем случае справедливо неравенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Пример. Экзамен по математике на вступительных экзаменах сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Решение. Пусть X – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, Y – множество абитуриентов, получивших оценки ниже 5, по условию $|X| = 210$, $|Y| = 180$, $|X \cup Y| = 250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $X \cap Y$. По соответствующей формуле получаем

$$|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| = 140.$$

Пример. В группе 20 человек изучают английский язык, 15 – французский, 10 – китайский. Известно также, что английский и французский изучают 8, английский и китайский – 7, французский и китайский – 5, а все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучает ни одного языка?

Решение. Приведем выкладки без особых объяснений.

$$|A \cup \Phi \cup K| = |A| + |\Phi| + |K| - (|A \cap \Phi| + |A \cap K| + |\Phi \cap K|) + |A \cap \Phi \cap K| = 20 + 15 + 10 - (8 + 7 + 5) + 3 = 28$$

$$|G| - |A \cup \Phi \cup K| = 30 - 28 = 2.$$

Сколько человек изучает только китайский?

$$|A \cup \Phi| = |A| + |\Phi| - |A \cap \Phi| = 20 + 15 - 8 = 27$$

$$|A \cup \Phi \cup K| - |A \cup \Phi| = 28 - 27 = 1$$

§6. Эквивалентность множеств

Если каждому элементу множества A сопоставлен единственный элемент множества B и при этом всякий элемент множества B оказывается сопоставленным одному и только одному элементу множества A , то говорят, что между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие. Множества A и B в этом случае называют **эквивалентными** или **равномощными**.

Эквивалентность множеств обозначается следующим образом: $A \sim B$.

Очевидно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда количество элементов в них одинаково. Например, множества $A = \{4, 5, 6\}$ и $B = \{x, y, z\}$ эквивалентны, $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие может быть установлено между элементами 4 и x , 5 и y , 6 и z .

Понятие эквивалентности годится и для бесконечных множеств. Пусть, например, $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $B = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$. Тогда $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие устанавливается по правилу: элементу $n \in A$ соответствует элемент $-n \in B$, т.е. $n \leftrightarrow -n$.

Пример. $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $B = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – множество всех целых чисел.

Перепишем множество B следующим образом: $B = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots, -n, n, \dots\}$, так, что 0 будет на первом месте, -1 на втором, 1 на третьем, -2 на четвертом и т.д. Нетрудно заметить, что отрицательные числа будут стоять на местах с четными номерами, а 0 и положительные числа – на местах с нечетными номерами. Поэтому взаимно однозначное соответствие между множествами A и B устанавливается по правилу: для всякого $n \geq 0$ элементу $a = 2n + 1$ из множества A (т.е. нечетному элементу) соответствует элемент $b = n$ из множества B ; элементу $a = 2n$ из множества A (т.е. четному элементу) соответствует элемент $b = -n$ из множества B . Таким образом, реализуется взаимно однозначное соответствие между множествами A и B : $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow -2$ и т.д.

Установить эквивалентность множеств, т.е. установить взаимно однозначное соответствие между их элементами можно различными путями. На рис. 5 показано, что множества точек двух отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны.

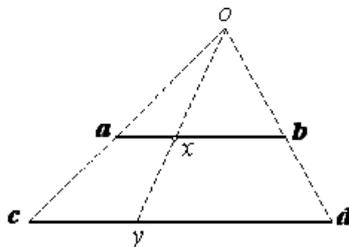


Рисунок 5.

Таким же образом можно установить эквивалентность множеств точек двух интервалов. На рис. 6 показано, что множества точек любого интервала (a, b) эквивалентно множеству точек всей прямой.

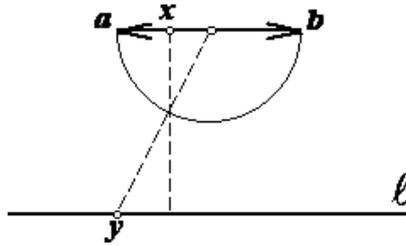


Рисунок 6.

Для установления эквивалентности двух множеств можно применять **теорему Бернштейна**: если множество A эквивалентно части множества B , а множество B эквивалентно части множества A , то множества A и B эквивалентны.

Применим теорему Бернштейна для доказательства того, что множество точек любого отрезка эквивалентно множеству точек любого интервала.

Пусть $A = [a, b]$ – произвольный отрезок, а $B = (c, d)$ – произвольный интервал.

Пусть $A_1 = (a_1, b_1)$ – любой внутренний интервал отрезка $[a, b]$, $A_1 \subset A$. Тогда $A_1 \sim B$.

Пусть $B_1 = [c_1, d_1]$ – любой внутренний отрезок интервала (c, d) , $B_1 \subset B$. Тогда $B_1 \sim A$.

Таким образом, выполняются условия теоремы Бернштейна. Поэтому $A \sim B$. Итак, все интервалы, отрезки и вся прямая эквивалентны между собой.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, называется **счетным**. Можно сказать также, что множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.

Пример. Следующие множества являются счетными.

1. $A_1 = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\}$;
2. $A_2 = \{2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$;
3. $A_3 = \{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$;
4. $A_4 = \{\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\}$.

Чтобы установить счетность некоторого множества, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и множества натуральных чисел.

Установить счетность множеств можно также, используя следующие теоремы о счетных:

1. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.
2. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.
3. Множество всех подмножеств счетного множества счетно.
4. Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа, счетно.
5. Если $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ – счетные множества, то множество всех пар $C = \{(a_k, b_n), k = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots\}$ счетно.
6. Множество всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ любых степеней с рациональными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ счетно.
7. Множество всех корней многочленов любых степеней с рациональными коэффициентами счетно.

Пример. Множество $A = \{3, 6, \dots, 3n, \dots\}$ счетно, т.к. A – бесконечное подмножество множества натуральных чисел, $A \subset N$.

Пример. Множество $A = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ неотрицательных целых чисел счетно, множество $B = \{0, -1, \dots, -n, \dots\}$ неположительных целых чисел тоже счетно, поэтому множество всех целых чисел $C = A \cup B = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ тоже счетно.

Пример. Геометрический смысл пары (a_k, b_n) – точка на плоскости с рациональными координатами (a_k, b_n) . Поэтому можно утверждать, что множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно.

Существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Такие множества называются **несчетными**.

Теорема Кантора. Множество всех точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

Доказательство. Пусть множество точек отрезка $[0, 1]$ счетно. Значит, эти точки можно перенумеровать, т.е. расположить в виде последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

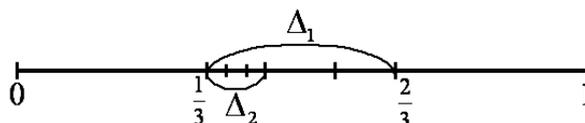


Рисунок 7.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равные части (рисунок 7.). Где бы ни находилась точка x_1 , она не может принадлежать всем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Поэтому среди них есть отрезок Δ_1 , не содержащий точку x_1 (рис. 2.7). Возьмем этот отрезок Δ_1 и разделим его на три равные части. Среди них всегда есть отрезок Δ_2 , не содержащий точку x_2 . Разделим этот отрезок на три равные части и т. д. Получим последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$. В силу **аксиомы Кантора** эта последовательность отрезков сходится к некоторой точке x при $n \rightarrow \infty$. По построению эта точка x принадлежит каждому отрезку $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$, т. е. она не может совпадать ни с одной из точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, т.е. последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не исчерпывает всех точек отрезка $[0, 1]$, что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка $[0, 1]$, называется множеством **мощности континуума**. Так как множества точек интервалов, отрезков и всей прямой эквивалентны между собой, то все они имеют мощность континуума. Чтобы доказать, что данное множество имеет мощность континуума, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством точек отрезка, интервала или всей прямой.

Приме. Из рис. 8 следует, что множество точек параболы $y = x^2$ эквивалентно множеству точек прямой $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, имеет мощность континуума.

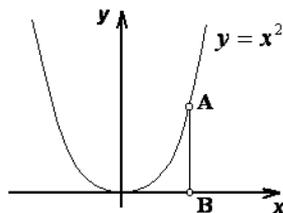


Рис. 8.

Установить мощность континуума можно также, используя следующие теоремы о множествах мощности континуума.

1. *Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума.*
2. *Множество всех точек n -мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.*
3. *Множество всех комплексных чисел имеет мощность континуума.*
4. *Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ имеет мощность континуума.*

Итак, мощности бесконечных множеств могут различаться. Мощность континуума больше, чем мощность счетного множества. Ответ на вопрос, существуют ли множества более высокой мощности, чем мощность континуума, дает следующая **теорема о множествах высшей мощности**: *множество всех подмножеств данного множества имеет более высокую мощность, чем данное множество.*

Из этой теоремы следует, что *множеств с максимально большой мощностью не существует.*

§7. Декартово произведение. Соответствия (отношения)

Декартовым или **прямым произведением** множеств X_1, X_2, \dots, X_n называется множество

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n \right\},$$

обозначаемое через $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, или $\prod_{k=1}^n X_k$. Если $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, то множество $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ называется **n -ой декартовой степенью** множества X и обозначается X^n . По определению $X^0 = \emptyset$. Если хотя бы одно из множеств X_i пусто, то $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \emptyset$. В общем случае $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times X)$, $X \times Y \neq Y \times X$, следовательно, \times не обладает свойствами ассоциативности и коммутативности.

Упорядоченной парой $\langle x, y \rangle$ называется совокупность двух элементов x и y , расположенных в определенном порядке. Две упорядоченные пары $\langle x, y \rangle$ и $\langle u, v \rangle$ равны между собой тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

Аналогично можно рассматривать тройки, четверки, n -ки элементов $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. В общем случае, конечная упорядоченная последовательность, допускающая повторения элементов данного множества, называется **кортежем** (вектором, n -кой, упорядоченным набором). Элементы кортежа заключаются в угловые $\langle \rangle$ или круглые $()$ скобки. В кортеже элементы «приписаны» к месту.

Примеры кортежей: $\langle 1, 2, 4, 6, 2 \rangle$, $\langle 2, 4, 5, 6 \rangle$, $\langle 5, 6, 2, 4 \rangle$. Второй и третий кортежи считаются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов.

В условной записи кортежа $\langle a, k, \dots, p \rangle$, элементы его образующие называются **координатами** (в этом плане любой кортеж рассматривается как вектор, компоненты которого есть его проекции).

Число компонент кортежа называется его **длиной** (мы уже говорили, что кортеж длины 2 называется парой (**упорядоченной парой**), кортеж длины 3 – тройкой, и т.д.)

n -местным отношением (соответствием) P , или **n -местным предикатом P** на множествах X_1, X_2, \dots, X_n , называется некоторое подмножество прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ ($P \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$). Элементы x_1, x_2, \dots, x_n (где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$) называются **связанными соответствием P** тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$.

В случае $n=2$ используются обозначения: $x P y$ или $\langle x, y \rangle$

Если $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, т.е. $P \subset A^n$, то чаще используют термин «отношение». В этом случае говорят, что P – n -местное отношение (предикат) на множестве X . Если же $X_1 \neq X_2 \neq \dots \neq X_n$, то обычно используют термин «соответствие». Примерами соответствия являются: функции, отображения, преобразования, операции и т.д.

При $n=1$ отношением P является подмножество множества X и называется **унарным** (одноместным) отношением (или соответствием), или свойством, на множестве X . Это означает, что в множество P попадут только те элементы множества X , которые обладают указанным в отношении признаком.

При $n=2$ отношение P называется **бинарным** (двухместным) отношением (или соответствием). Бинарные отношения используются для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов множества, т.е. если отношение P определено на множестве $X \times Y$ ($P \subset X \times Y$), то это значит, что в множество P попадут только те пары множества $X \times Y$, между элементами которых имеет место указанное отношение.

Далее остановимся только на бинарных отношениях.

Так как бинарное отношение – множество, то способы задания бинарного отношения такие же, как и способы задания множества. Бинарное отношение может быть задано перечислением упорядоченных пар или указанием общего свойства упорядоченных пар.

Пример. а) $\rho = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$ – отношение задано перечислением упорядоченных пар;

б) $P = \{ \langle x, y \rangle \mid x + y = 7, x, y - \text{действительные числа} \}$ – отношение задано указанием свойства $x + y = 7$.

Кроме того, бинарное отношение может быть задано **матрицей бинарного отношения**. Пусть $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ – конечное множество. Матрица бинарного отношения C есть квадратная матрица порядка n , элементы которой c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i P a_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. Зададим бинарное отношение ρ тремя ниже перечисленными способами:

а) $P = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$ – отношение задано перечислением всех упорядоченных пар;

б) $P = \{ \langle a_i, a_j \rangle \mid a_i < a_j, a_i, a_j \in A \}$ – отношение задано указанием свойства «меньше» на множестве A ;

в) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – отношение задано матрицей бинарного отношения C .

Область определения бинарного отношения ρ называется множеством $D_\rho = \{x \mid \text{существует } y, \text{ что } x \rho y\}$.

Область значений бинарного отношения ρ называется множеством $R_\rho = \{y \mid \text{существует } x, \text{ что } x \rho y\}$.

Область задания бинарного отношения ρ называется множеством $M_\rho = D_\rho \cup R_\rho$.

К отношениям применимы стандартные операции теории множеств.

Пример. Пусть R – множество действительных чисел. Рассмотрим на этом множестве следующие отношения: ρ_1 – « \leq »; ρ_2 – « \geq »; ρ_3 – « $<$ »; ρ_4 – « \geq »; ρ_5 – « $>$ ». Тогда $\rho_1 = \rho_2 \cup \rho_3$; $\rho_2 = \rho_1 \cap \rho_4$; $\rho_3 = \rho_1 \setminus \rho_2$; $\rho_1 = \overline{\rho_5}$.

Определим еще две операции над отношениями.

Отношение называется **обратным** к отношению и обозначается ρ^{-1} , если $\rho^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \rho \}$.

Пример. $\rho = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$. $\rho^{-1} = \{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}$.

Пример. $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid x - y = 2, x, y \in R \}$.

$\rho^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in \rho \} = \{ \langle x, y \rangle \mid y - x = 2, x, y \in R \} = \{ \langle x, y \rangle \mid -x + y = 2, x, y \in R \}$.

Композицией двух отношений ρ и σ называется отношение

$\sigma \circ \rho = \{ \langle x, z \rangle \mid \text{существует такое } y, \text{ что } \langle x, y \rangle \in \rho \text{ и } \langle y, z \rangle \in \sigma \}$.

Пример. $\rho = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \sin x \}$. $\sigma = \{ \langle x, y \rangle \mid y = \sqrt{x} \}$.

$\sigma \circ \rho = \{ \langle x, z \rangle \mid \text{существует такое } y, \text{ что } \langle x, y \rangle \in \rho \text{ и } \langle y, z \rangle \in \sigma \} = \{ \langle x, z \rangle \mid \text{существует такое } y, \text{ что } y = \sin x \text{ и } z = \sqrt{y} \} = \{ \langle x, z \rangle \mid z = \sqrt{\sin x} \}$.

Утверждение. Для всякого бинарного отношения справедливо свойство: $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что два множества равны, достаточно показать, что они состоят из одних и тех же элементов. Предположим, что $\langle x, y \rangle \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$ и, рассуждая последовательно, покажем, что $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$. Пусть $\langle x, y \rangle \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$, тогда $\langle y, x \rangle \in (\sigma \circ \rho)$. Существует такое z , что $\langle y, z \rangle \in \rho$ и $\langle z, x \rangle \in \sigma$. Существует такое z , что $\langle z, y \rangle \in \rho^{-1}$, а $\langle x, z \rangle \in \sigma^{-1}$, следовательно $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

Рассуждая в обратном порядке (снизу вверх), получим, что из того, что $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$, следует, что $\langle x, y \rangle \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$. Что и требовалось доказать.

1 Отношение ρ называется **рефлексивным** на множестве X , если для любого $x \in X$ выполняется $x \rho x$. Из определения следует, что всякий элемент $\langle x, x \rangle \in \rho$.

Пример. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$. Отношение ρ рефлексивно. Если X – конечное множество, то главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы. Для данного примера

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение рефлексивно, т.к. каждое число равно самому себе.

3. Пусть X – множество людей и ρ отношение «жить в одном городе». Это отношение рефлексивно, т.к. каждый живет в одном городе сам с собой.

2 Отношение ρ называется **симметричным** на множестве X , если для любых $x, y \in X$ из $x \rho y$ следует $y \rho x$. Очевидно, что ρ симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Пример. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$. Отношение ρ симметрично. Если X – конечное множество, то матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали. Для данного примера

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение симметрично, т.к. если x равно y , то и y равно x .

3. Пусть X – множество студентов и ρ отношение «учиться в одной группе». Это отношение симметрично, т.к. если x учится в одной группе с y , то и y учится в одной группе с x .

3. Отношение ρ называется **транзитивным** на множестве X , если для любых $x, y, z \in X$ из $x \rho y$ и $y \rho z$ следует $x \rho z$. Одновременное выполнение условий $x \rho y, y \rho z, x \rho z$ означает, что пара $\langle x, z \rangle$ принадлежит композиции $\rho \circ \rho$. Поэтому для транзитивности ρ необходимо и достаточно, чтобы множество $\rho \circ \rho$ являлось подмножеством ρ , т.е. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Пример. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$. Отношение ρ транзитивно, т.к. наряду с парами $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, z \rangle$ имеется пара $\langle x, z \rangle$. Например, наряду с парами $\langle 1, 2 \rangle$, и $\langle 2, 3 \rangle$ имеется пара $\langle 1, 3 \rangle$.

2. Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение \leq (меньше или равно). Это отношение транзитивно, так как если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

3. Пусть X – множество людей и ρ отношение «быть старше». Это отношение транзитивно, так как если x старше y и y старше z , то x старше z .

4. Отношение ρ называется **антисимметричным** на множестве X , если для любых $x, y \in X$ из $x \rho y$ и $y \rho x$ следует $x = y$. Из определения антисимметричности следует, что всякий раз, когда пара $\langle x, y \rangle$ принадлежит одновременно ρ и ρ^{-1} , должно выполняться равенство $x = y$. Другими словами, $\rho \cap \rho^{-1}$ состоит только из пар вида $\langle x, x \rangle$.

Пример 2.87. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$. Отношение ρ антисимметрично. Отношение $\sigma = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ не антисимметрично. Например, $\langle 1, 2 \rangle \in \sigma$, и $\langle 2, 1 \rangle \in \sigma$, но $1 \neq 2$.

2. Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение \leq (меньше или равно). Это отношение антисимметрично, т.к. если $x \leq y$, и $y \leq x$, то $x = y$.

5. Отношение ρ называется **антирефлексивным** на множестве X , если для любого $x \in X$ не выполняется $x \rho x$.

6. Отношение ρ называется **полным** или **линейным** на множестве X , если для любых $x, y \in X$ и $x \neq y$ выполняется либо $x \rho y$, либо $y \rho x$.

Отношение ρ называется отношением **эквивалентности** на множестве X , если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно на множестве X .

Классом эквивалентности, порожденным элементом x , называется подмножество множества X , состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x \rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x , обозначается через $[x]$. Таким образом, $[x] = \{y \in X \mid x \rho y\}$.

Классы эквивалентности образуют **разбиение** множества X , т. е. систему непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которых совпадает со всем множеством X . Справедливо утверждение, что **любому отношению эквивалентности однозначно сопоставляется разбиение и, обратно, любому разбиению множества однозначно сопоставляется отношение эквивалентности**.

Пример. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$. Отношение ρ является отношением эквивалентности.

2. Пусть X – множество действительных чисел и ρ отношение равенства. Это отношение эквивалентности.

3. Пусть X – множество студентов и ρ отношение «учиться в одной группе». Это отношение эквивалентности.

Пример. 1. Отношение равенства на множестве целых чисел порождает следующие классы эквивалентности: для любого элемента x из этого множества $[x] = \{x\}$, т.е. каждый класс эквивалентности состоит из одного элемента.

2. Класс эквивалентности, порожденный парой $\langle x, y \rangle$ определяется соотношением: $[\langle x, y \rangle] = \left\{ \langle u, v \rangle \mid \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \right\}$. Каждый класс эквивалентности, порожденный парой $\langle x, y \rangle$, определяет одно рациональное число.

3. Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов одной группы.

Отношение ρ называется отношением **порядка** (или просто порядком) на множестве X , если оно антисимметрично и транзитивно на множестве X .

Если отношение порядка полно, то оно называется отношением *полного (линейного) порядка*, в противном случае – отношением *частичного порядка*.

Если отношение порядка рефлексивно, то оно называется отношением *нестрогого порядка*, если антирефлексивно – отношением *строогого порядка*.

Отношение, обратное отношению порядка будет, очевидно, отношением порядка.

Пример. 1. Пусть X – конечное множество, $X = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3>\}$. Отношение ρ есть отношение порядка.

2. Отношение $A \subseteq B$ на множестве подмножеств некоторого множества U есть отношение порядка.

3. Отношение делимости на множестве натуральных чисел есть отношение порядка.

Символическая запись *функции*: $f : X^n \rightarrow X$, где символ \rightarrow означает однозначное отображение кортежа длины n из элементов множества X в элемент множества X .

Так как n -местная функция по n элементам множества X определяет $(n+1)$ -й элемент множества X , то n -местную функцию можно рассматривать как $(n+1)$ -местное отношение (соответствие) на множестве X .

§8. Нечеткие множества

В 1965 году американский математик *Лотфи Заде* (L. Zade) опубликовал статью «Нечеткие множества» (“Fuzzy sets”). Было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания сложных плохо определенных систем, в которых наряду с количественными данными присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные. В последующих статьях им был разработан фази-алгоритм. Существует легенда о том, каким образом была придумана теория нечетких множеств. Однажды Заде имел длинную дискуссию со своим другом относительно того, чья жена привлекательнее. Термин “привлекательная” - очень неопределенный, и в результате дискуссии они так и не смогли прийти к удовлетворительному итогу. Это вынудило Заде сформулировать концепцию, которая выражает нечеткие понятия типа “привлекательная” в числовой форме. Первое практическое применение фази-теории в начале 80-х годов связано с управлением обжиговой цементной печью и химическим инжектором в установке по очистке воды.

Понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, и статья Заде породила новое научное направление. Произошло “раздвоение” математики, появились нечеткие функции, нечеткие отношения, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т. д. Эти понятия широко используются в экспертных системах, системах искусственного интеллекта. Изложим основные понятия нечетких множеств.

Нечетким подмножеством A множества X назовем пару (X, μ_A) , где $\mu_A(x)$ – функция, каждое значение которой $\mu_A(x) \in [0, 1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ подмножеству A . Функция μ_A называется **функцией принадлежности** множества A .

Для обычного четкого множества A можно положить

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, обычное множество является частным случаем нечеткого множества.

Функцию принадлежности, как и всякую функцию, можно задавать таблично или аналитически.

Пример. Приведем пример нечеткого множества A , которое формализует понятие «несколько», ясного лишь на интуитивном уровне. Пусть $X = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,6	0,8	1	1	0,9	0,7	0,2	0 ...

Аналогично можно ввести понятия «много», «мало», «около 100», «почти 20», и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются **лингвистическими**. Это основной тип переменных в языке людей.

Пример. Пусть $X = (0, \infty)$ – множество положительных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана формулой:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 50, \\ \left(1 + \frac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, & x > 50. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 9. Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество A соответствует понятию «старый». Аналогично можно ввести понятия «молодой», «средних лет» и т. д.

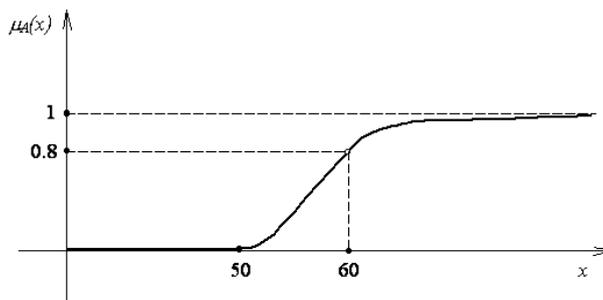


Рис. 9.

Пример. Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями: «малое», «большое», «среднее», «около 5 км» и т. д.

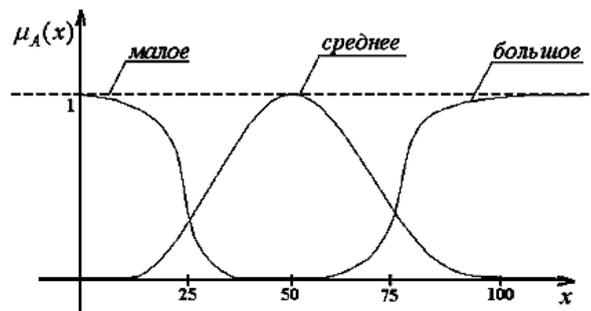


Рис. 10.

Каждое значение описывается нечетким множеством. Пусть речь идет о поездках на такси по городу. В качестве универсального множества X можно взять отрезок $[0, 100]$ км и задать функцию принадлежности значений так, как показано на рисунке 10.