



ЭТ2 ПРОСТЕЙШИЕ ЦЕПИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Требуемое оборудование

- | | |
|---|-------|
| 1. Генератор звуковых частот ЗГ1 | 1 шт. |
| 2. Комбинированный измерителя мощности и фазы ИМФ1 | 1 шт. |
| 3. Стенд с объектами исследования СЗ-ЭМ01 | 1 шт. |

Цель работы

Экспериментальное и теоретическое исследование зависимостей токов и напряжений в резисторе, катушке индуктивности, конденсаторе при их простейших соединениях в цепи с синусоидальными источниками. Освоить символический метод расчета, проверить справедливость первого и второго законов Кирхгофа. Научиться строить векторные диаграммы, амплитудочастотные (АЧХ и ЛАЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики простейших цепей с одним реактивным элементом.

Краткое теоретическое введение

Гармонический ток и его характеристики

В лабораторной работе исследуются линейные электрические цепи с гармоническими источниками, в которых ЭДС, напряжения и токи изменяются по синусоидальному закону и имеют одинаковую частоту.

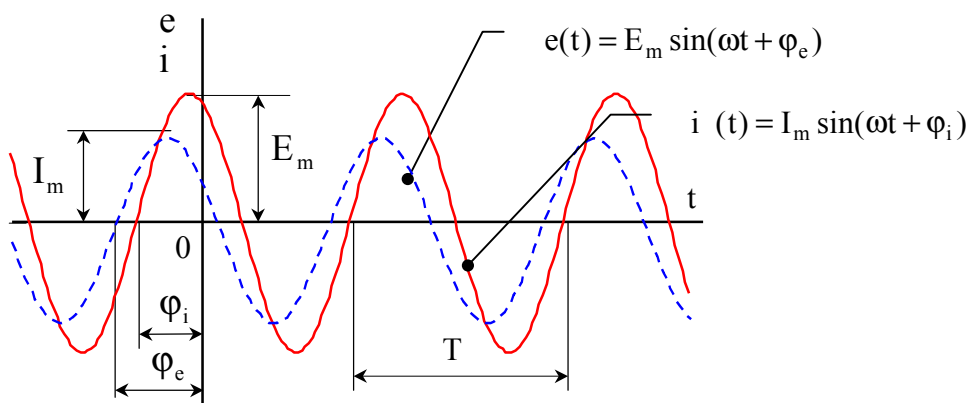


Рис. 1

На рис. 1 показаны графики гармонических сигналов (ЭДС и тока)

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e) \text{ и } i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

где E_m и I_m - амплитудные или максимальные значения; $\omega = 2\pi f$ - угловая частота сигнала; $f = 1/T$ - частота сигнала; T - период колебания; φ_e и φ_i - начальные фазы гармонических колебаний.

Одной из основных характеристик гармонических сигналов является их действующие значения

$$E = E_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2} \quad \text{и} \quad I = I_m / \sqrt{2}.$$

В электрической цепи кроме источников содержатся такие элементы, как резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, катушки взаимной индуктивности. Такие элементы цепи называются пассивными и для расчета представляются схемами замещения. Каждая схема замещения должна отражать основные электромагнитные процессы, протекающие в конкретном элементе.

Резистор

В резистивном элементе с сопротивлением R электромагнитная энергия преобразуется в тепло. Мгновенная мощность, с которой происходит преобразование энергии, определяется соотношением: $p(t) = i^2 R$. Резистивные (или их ещё называют активные) сопротивления вводятся в схемы замещения также для учета необратимого преобразования электромагнитной энергии в другие виды (например, механическую, энергию излучения и т. п.).

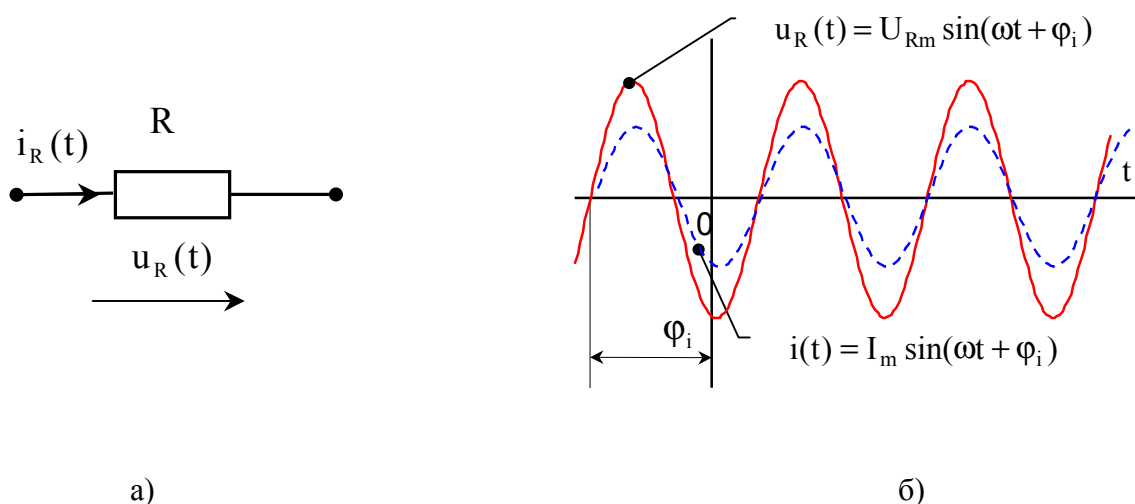


Рис. 2

В резистивном элементе (рис. 2,а) напряжение связано с током законом Ома: $u_R(t) = R i_R(t)$. Если ток в резисторе $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, то и напряжение $u_R(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ имеет синусоидальную форму и такую же фазу, что и ток в резисторе. Говорят, что ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 2,б).

Катушка индуктивности

Если через катушку индуктивности (рис. 3,а) пропустить переменный синусоидальный ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, то он создаст переменный магнитный поток, пронизывающий витки катушки. По закону электромагнитной индукции на зажимах катушки этот переменный поток наведёт синусоидальное напряжение:

$$u_L(t) = w \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt} = I_m \omega L \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ), \quad (1)$$

где w – число витков катушки; $\Psi = w\Phi$ – потокосцепление; $L = d\Psi/di$ – индуктивность; $X_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление.

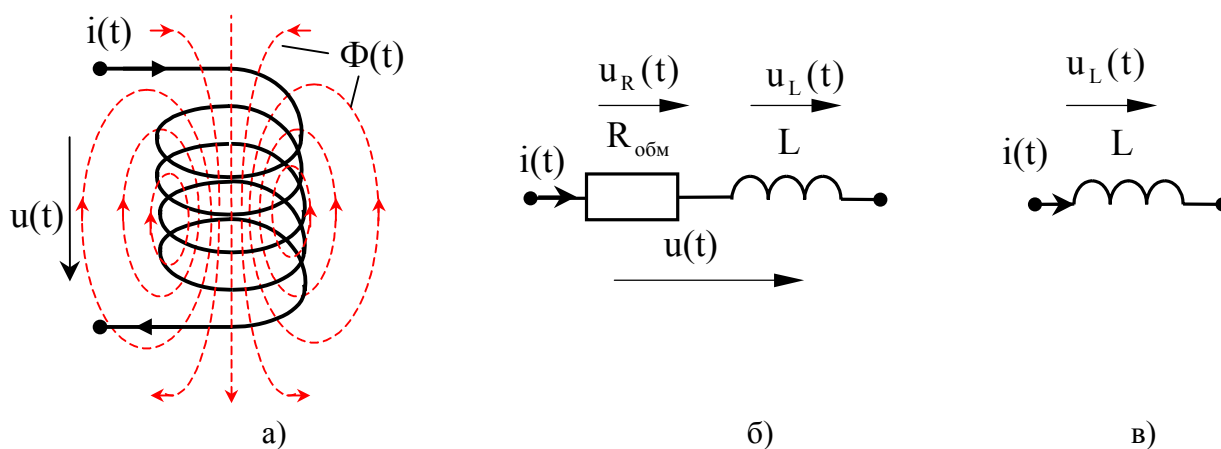


Рис.3

В системе единиц СИ индуктивность L имеет размерность Генри (Гн), а индуктивное сопротивление – (Ом).

Индуктивность L учитывает энергию магнитного поля катушки $w_L = L i^2 / 2$. Из соотношения (1) видно, что ток через индуктивность $i(t)$ отстаёт от напряжения $u_L(t)$ на угол 90° (рис. 4).

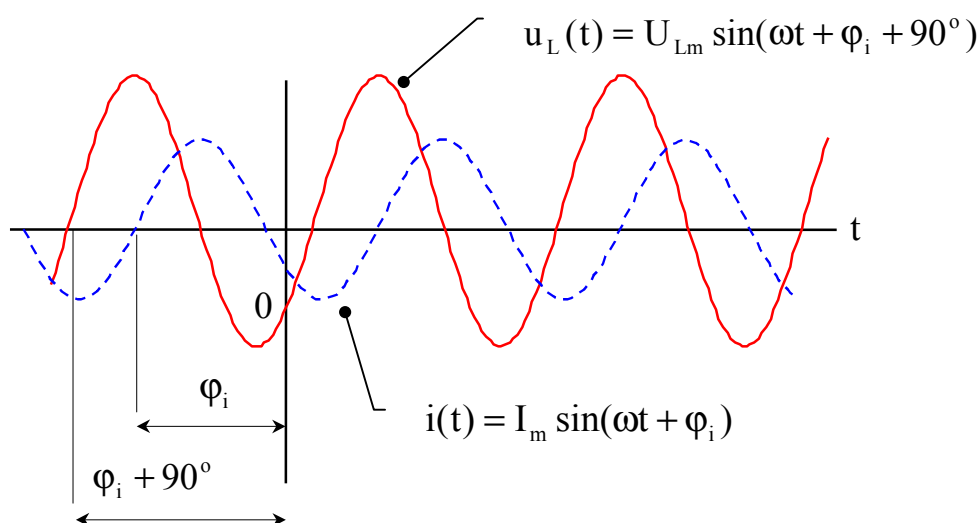


Рис. 4

Переменный ток, протекая по виткам катушки, создаёт в проводниках тепловые потери мощности $p = i^2 R_{\text{обм}}$, где $R_{\text{обм}}$ - активное сопротивление обмотки. На рис. 3,б показана низкочастотная схема замещения катушки индуктивности, состоящая из индуктивности L и активного сопротивления обмотки $R_{\text{обм}}$. Если сопротивлением обмотки можно пренебречь, то такую катушку считают идеальной индуктивностью (рис. 3,в). Для высоких частот в схеме замещения необходимо учитывать межвитковую ёмкость катушки.

Из (1) следует, что при заданном напряжении $u_L(t)$ ток $i_L(t)$ можно найти по соотношению

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(t) dt. \quad (2)$$

Если для установившегося синусоидального режима подставить напряжение $u_L(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ в (2), то ток через индуктивность определится соотношением

$$i_L(t) = \frac{U_m}{X_L} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ). \quad (3)$$

Конденсатор

Конденсатор является элементом электрической цепи, имеющим две проводящие обкладки, между которыми находится слой диэлектрика (рис. 5,а). Если к зажимам конденсатора (рис. 5,а) подключить источник синусоидального напряжения $u_C(t) = U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_u)$, то на его обкладках возникнет изменяющийся во времени электрический заряд $q(t)$, т. е. через конденсатор будет протекать электрический ток

$$i_c(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c} \cdot \frac{du_c}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = U_{cm} \omega C \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ). \quad (4)$$

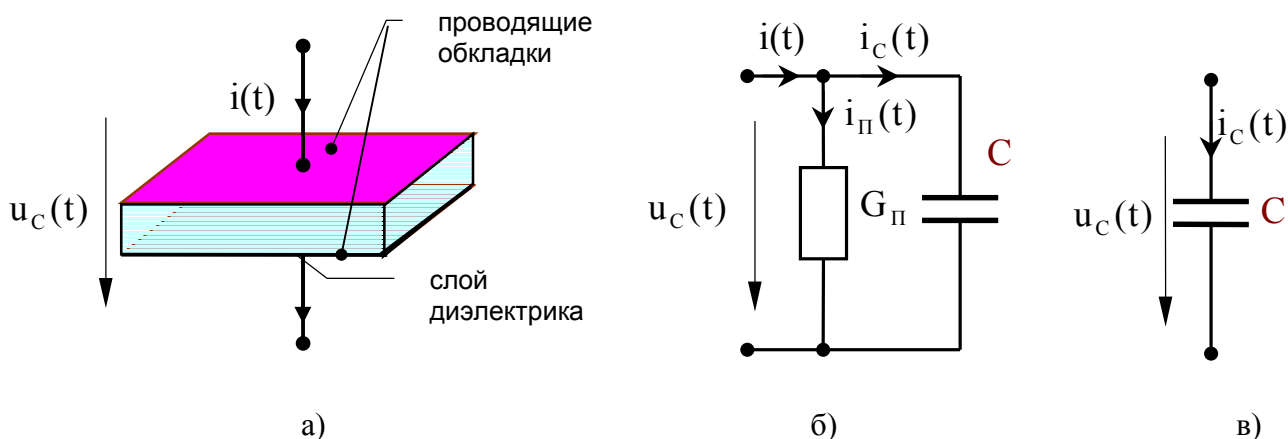


Рис. 5

В (2) $C = dq/du_c$ - ёмкость конденсатора, которая определяет зависимость изменения величины заряда на обкладках конденсатора от изменения напряжения, приложенного к его обкладкам; $x_C = 1/\omega C$ - реактивное ёмкостное сопротивление.

В системе единиц СИ ёмкость C имеет размерность Фарада (Ф), а ёмкостное сопротивление - (Ом).

Из соотношения (4) видно, что ток через конденсатор $i(t)$ опережает напряжение $u_c(t)$ на угол 90° (рис. 6).

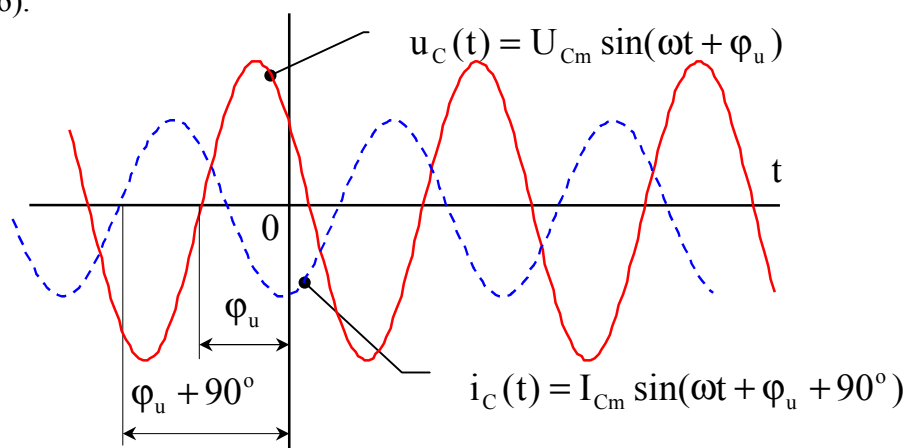


Рис. 6

Основной особенностью конденсатора является его способность запасать энергию электрического поля $w_C = C u_C^2 / 2$. Кроме того, в конденсаторе имеют место тепловые потери энергии в диэлектрике и обкладках, а также происходит запас энергии в магнитном поле. На рис. 5,б показана низкочастотная схема замещения конденсатора, состоящая из параллельного соединения ёмкости C и активного сопротивления с проводимостью G_{Π} , учитывающей потери в диэлектрике и обкладках. Если потерями можно пренебречь, то конденсатор будет представлять собой идеальную ёмкость (рис. 5,в).

Из (4) следует, что при заданном токе $i_C(t)$ напряжение $u_C(t)$ можно найти по соотношению

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(t) dt. \quad (5)$$

Если для установившегося синусоидального режима подставить ток $i_C(t) = I_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_i)$ в (5), то напряжение на ёмкости примет вид

$$u_C(t) = I_{Cm} x_C \sin(\omega t + \varphi_i - 90^\circ). \quad (6)$$

Символический метод расчета

Как известно, для любой электрической цепи справедливы **законы Кирхгофа для мгновенных значений** напряжений и токов.

1. *Алгебраическая сумма мгновенных значений токов в проводниках, соединенных в узел, равна нулю*

$$\sum \{\pm i_j(t)\} = 0.$$

2. *Алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС всех источников в любом замкнутом контуре цепи равна алгебраической сумме мгновенных значений напряжений на всех остальных элементах того же контура*

$$\sum \{\pm e_j(t)\} = \sum \{\pm u_i(t)\}.$$

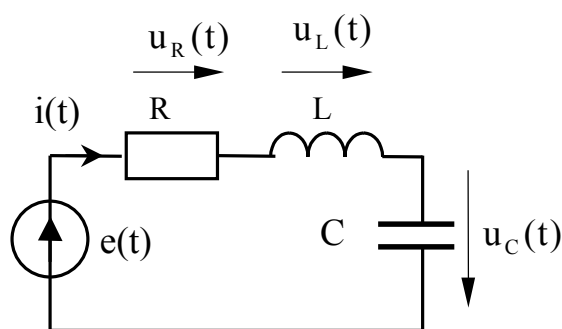
Если в установившемся режиме напряжение изменяется по гармоническому закону, то напряжения на линейных элементах цепи и токи ветвей также будут изменяться по гармоническому закону. Рассмотрим, как изменяются токи и напряжения на резисторе, катушке индуктивности и конденсаторе, для чего используем схемы замещения с последовательным и параллельным соединением идеальных элементов R , L и C .

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для схемы рис. 7,а

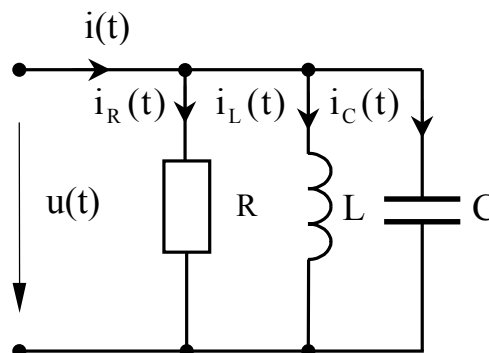
$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \quad (7)$$

и по первому закону Кирхгофа для схемы рис. 7,б

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \cdot \quad (8)$$



а



б

Рис. 7

Для гармонических функций второй и первый законы Кирхгофа для схем рис. 7 примут вид:

$$\begin{aligned} E_m \sin(\omega t + \varphi_e) = \\ = I_m R \sin(\omega t + \varphi_i) + I_m x_L \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) + I_m x_C \sin(\omega t + \varphi_i - 90^\circ) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) + \frac{U_m}{x_L} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) + \frac{U_m}{x_L} \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае для анализа и расчета полученных уравнений можно использовать символический метод. Суть его состоит в представлении гармонических функций комплексными величинами. При этом уравнения, составленные для фиксированной частоты в интегрально-дифференциальной форме, переходят в алгебраические уравнения с комплексными величинами токов, напряжений и ЭДС.

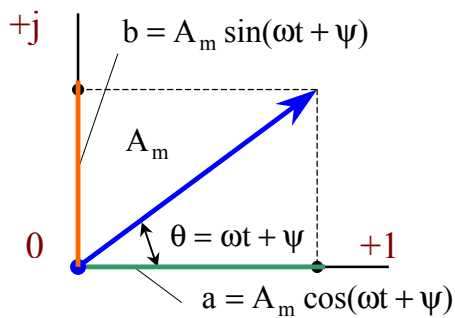


Рис. 8

Каждой гармонической функции $a(t)$ можно поставить в соответствие комплексное число \underline{A} называемое комплексом гармонической функции (рис. 2.8)

$$\begin{aligned}\underline{A} &= a + jb = A_m e^{j\theta} = A_m e^{j(\omega t + \psi)} = \\ &= A_m e^{j\omega t} e^{j\psi} = \quad \quad \quad . \quad (11) \\ &= A_m [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)]\end{aligned}$$

Модуль \underline{A} равен амплитуде гармонической функции - A_m , а аргумент - $\theta = \omega t + \psi$ её фазе. Мнимая часть комплекса \underline{A} равна исходной гармонической функции

$$\text{Im}[\underline{A}] = A_m \sin(\omega t + \psi) = a(t). \quad (12)$$

Обозначим $A_m e^{j\psi} = \dot{A}_m$ - комплекс амплитудного значения.

Преобразуя (8) и (9) с учетом (10), (11) и (12), получим:

$$\text{Im}[\dot{E}_m e^{j\omega t}] = \text{Im}[\dot{R} \dot{I}_m e^{j\omega t}] + \text{Im}[x_L \dot{I}_m e^{j90^\circ} e^{j\omega t}] + \text{Im}[x_C \dot{I}_m e^{-j90^\circ} e^{j\omega t}]; \quad (13)$$

$$\text{Im}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \text{Im}\left[\frac{\dot{U}_m}{R} e^{j\omega t}\right] + \text{Im}\left[\frac{\dot{U}_m}{x_L} e^{-j90^\circ} e^{j\omega t}\right] + \text{Im}\left[\frac{\dot{U}_m}{x_C} e^{j90^\circ} e^{j\omega t}\right], \quad (14)$$

где $\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi_e}$, $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ и $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ - комплексные амплитуды; $e^{j\omega t}$ - вращающийся вектор. Соотношения (13) и (14) можно упростить, учитывая $j = e^{j90^\circ}$, $-j = e^{-j90^\circ}$ и $-j = 1/j$, используя свойства комплексных функций и сократив подобные члены. В результате получим законы Кирхгофа в комплексной форме для амплитудных значений для схем рис. 7:

$$\dot{E}_m = \dot{R} \dot{I}_m + jx_L \dot{I}_m - jx_C \dot{I}_m = \dot{U}_{Rm} + \dot{U}_{Lm} + \dot{U}_{Cm}; \quad (15)$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R} + \frac{\dot{U}_m}{jx_L} + \frac{\dot{U}_m}{-jx_C} = \dot{I}_{Rm} + \dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm}. \quad (16)$$

Законы Кирхгофа в комплексной форме для действующих значений токов $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_i}$ и

напряжений $\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u}$ имеют следующий вид:

$$\dot{E} = R\dot{I} + jx_L\dot{I} - jx_C\dot{I} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C; \quad (17)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jx_L} + \frac{\dot{U}}{-jx_C} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \quad (18)$$

Законы Кирхгофа в комплексной форме

1. Алгебраическая сумма комплексных значений токов в проводниках, соединенных в узел, равна нулю

$$\sum(\pm \dot{I}_j) = 0.$$

2. Алгебраическая сумма всех комплексных источников ЭДС в любом замкнутом контуре цепи равна алгебраической сумме комплексных значений напряжений на всех остальных элементах того же контура

$$\sum(\pm \dot{E}_j) = \sum(\pm \dot{U}_i).$$

Для иллюстрации взаимосвязи между токами и напряжениями в конкретной схеме строят векторные диаграммы: для напряжений - топографические, построенные с соблюдением порядка расположения элементов в цепи, для токов - лучевые, построенные для выбранных узлов схемы, причем вектора выходят из начала координат или какой-то другой выбранной точки. Векторные диаграммы изображают законы Кирхгофа в комплексной форме, представленные суммой векторов на комплексной плоскости.

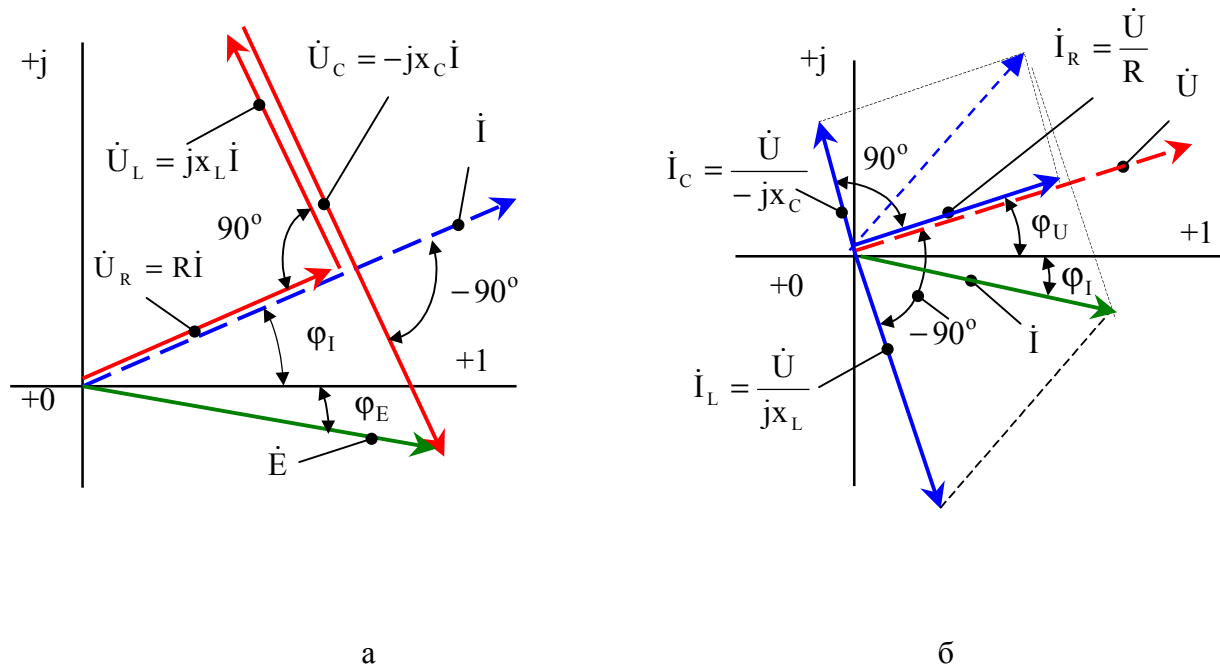


Рис. 9

На рис. 9 показаны векторные диаграммы напряжений и лучевая диаграмма для токов, построенные по уравнениям (17) и (18) для схем рис. 7. При построении диаграмм должны быть заданы масштабы напряжений и токов, тогда длина векторов напряжений и токов будет пропорциональна их действующим значениям, а угол поворота векторов относительно вещественной оси равен их начальной фазе. Положительные значения углов отсчитываются против направления вращения часовой стрелки, а отрицательных - по часовой стрелки.

Уравнения (17) и (18) позволяют определить токи и напряжения на элементах цепи. Так для схемы (рис. 7,а) из (17) определится комплекс тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + jx_L - jx_C} = \frac{\dot{E}}{R + j(x_L - x_C)} = \frac{\dot{E}}{R + jX} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}}, \quad (19)$$

где X – суммарное реактивное сопротивление ветви; $\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$ – комплексное сопротивление ветви, а Z и φ – её модуль и угол.

Ток для схемы (рис 7,б) определится из (18)

$$\dot{I} = \dot{U} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C} \right] = \dot{U} \left[\frac{1}{R} + j \frac{x_L - x_C}{x_L x_C} \right] = \dot{U}(g + jb) = \dot{U}\underline{Y}, \quad (20)$$

где g и b – активная и реактивная проводимости параллельных ветвей; $\underline{Y} = g + jb = Ye^{j\psi}$ – суммарная комплексная проводимость ветвей, а Y и ψ – её модуль и угол.



Рис. 10

Сопротивления Z , R и X , а также проводимости Y , g и b образуют треугольники сопротивлений и проводимостей (рис. 10).

Частотные характеристики простейших цепей

Под входной характеристикой цепи при гармоническом воздействии понимают зависимость его входного комплексного сопротивления - $\underline{Z}_{вх}(\omega)$ или проводимости - $\underline{Y}_{вх}(\omega)$ от частоты.

Комплексной передаточной функцией по напряжению - $\dot{K}(j\omega)$ называют зависимость отношения комплексов выходного напряжения к входному напряжению от частоты. Функция $\dot{K}(j\omega)$ представляется двумя зависимостями: АЧХ или ЛАЧХ - зависимость модуля входного сигнала от частоты и ФЧХ - зависимость его фазы от частоты (см. лаб. работу №30). При расчете частотных характеристик линейных цепей реактивные сопротивления индуктивности и емкости записываются в функции частоты: $x_L = \omega L$ и $x_C = 1/\omega C$. Предполагается, что сопротивления резистивных элементов R от частоты не зависят.

Рассмотрим расчёт частотных характеристик на примере схемы с последовательным соединением элементов R и C (рис. 11).

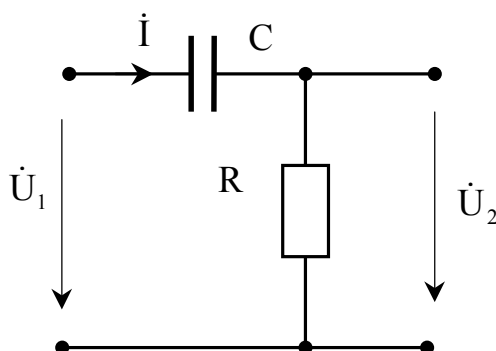


Рис. 11

Входное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{BX}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)} = R - \frac{j}{\omega C} = Z_{BX}(\omega)e^{j\psi_{BX}(\omega)}, \quad (21)$$

где $Z_{BX}(\omega) = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ и $\psi_{BX}(\omega) = -\arctg(1/\omega RC)$.

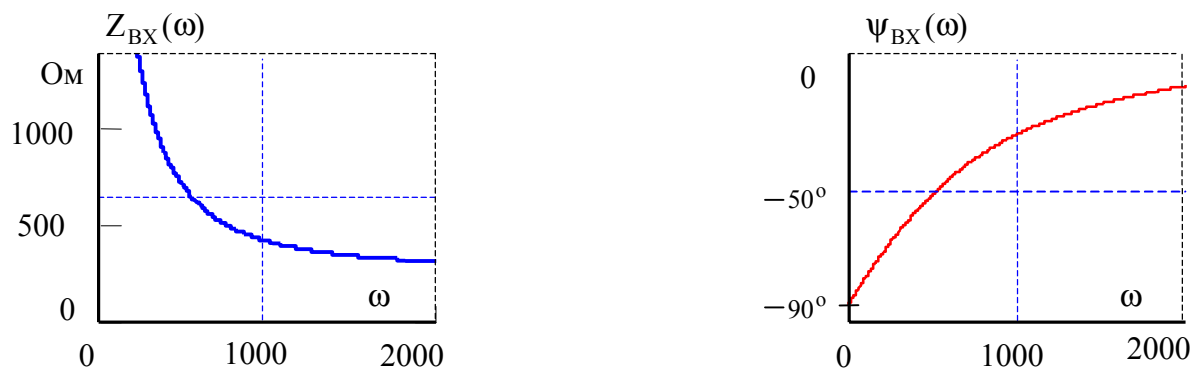


Рис. 12

На рис. 12 изображены графики входных характеристик $Z_{BX}(\omega)$, $\psi_{BX}(\omega)$, рассчитанных по формулам (21).

Комплексная передаточная функция по напряжению будет иметь вид

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)} = \frac{R}{R - j/\omega C} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (22)$$

АЧХ и ФЧХ определяются соотношениями

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(1/\omega RC\right)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right). \quad (23)$$

Для построения ЛАЧХ определяется величина

$$L(\omega) = 20 \lg K(\omega). \quad (24)$$

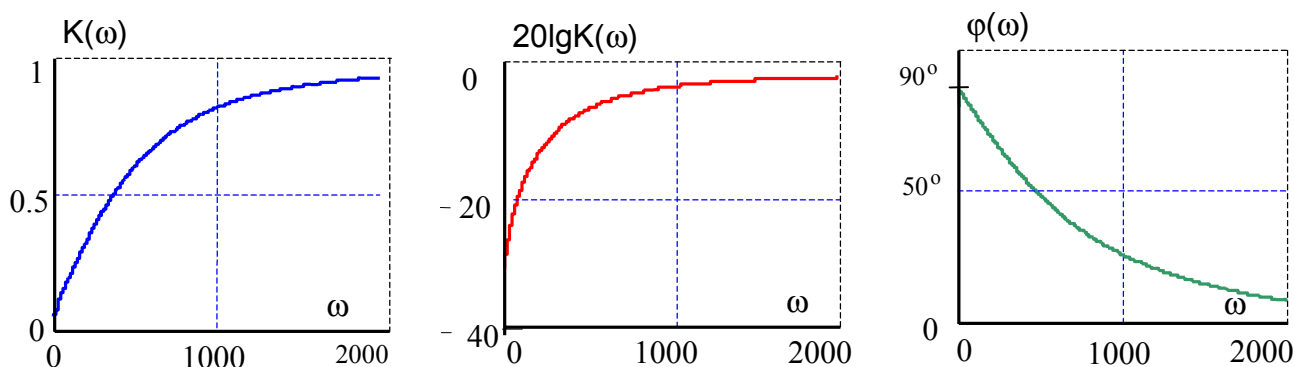


Рис. 13

На рис. 13 представлены графики частотных характеристик АЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ, рассчитанных по формулам (22) – (24).

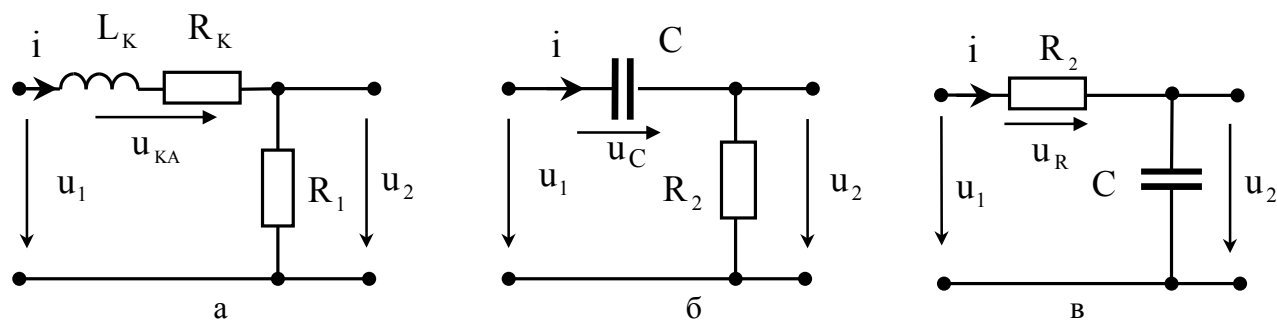


Рис. 14

Методика проведения экспериментов

Для измерения входного комплексного сопротивления - Z необходимо воспользоваться комбинированным прибором измерителя мощности и фазы (ИМФ1). Он позволяет проводить измерения амплитудных значений синусоидального тока и падения напряжения на участке исследуемой цепи, а также разности фаз между током и напряжением. Измерительная схема представлена на рис. 15.

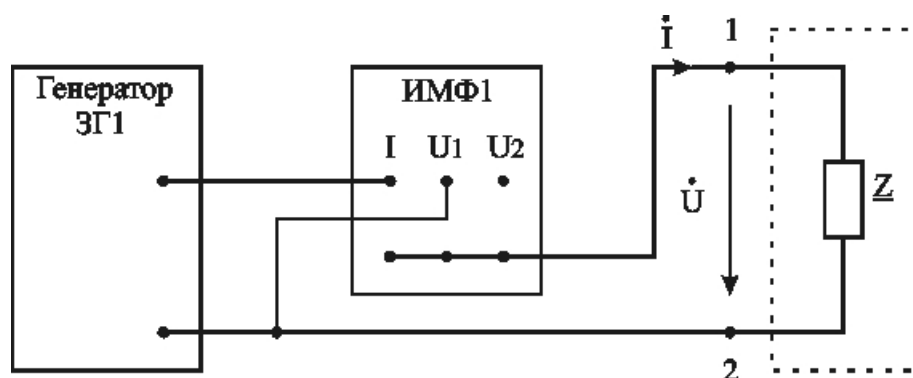


Рис. 15

Для определения комплексной передаточной функции по напряжению необходимо воспользоваться комбинированным прибором измерителя мощности и фазы (ИМФ1). Он позволяет проводить измерения амплитудных значений падений напряжения на участках исследуемой цепи, а также разности фаз между ними. Измерительная схема представлена на рис.

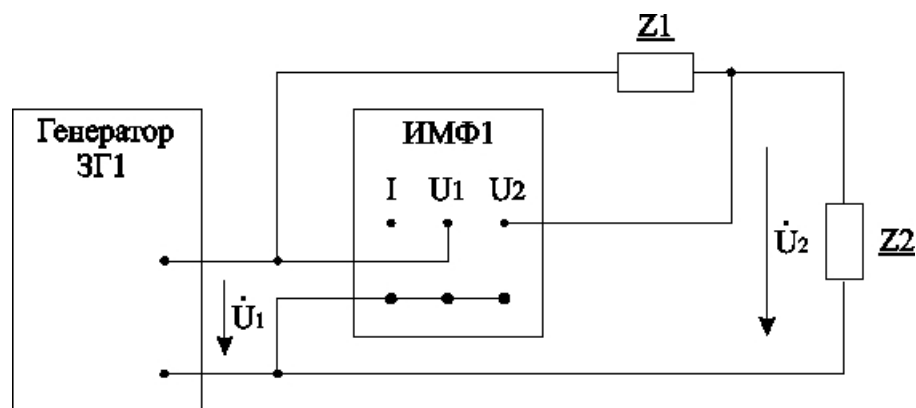


Рис. 16

Рекомендуемое задание к работе

1. Опытное определение параметров резистора катушки индуктивности и ёмкости

Для опытного определения параметров сопротивления, катушки индуктивности (L_K, R_K) и конденсатора - C соберите схему по рис. 15. Регуляторы генератора установить в положения, обеспечивающие на выходе гармонический сигнал напряжением $U_1 = 10$ В (измеритель мощности и фазы (ИМФ 1) установить в положение U_1) при частоте $f = 200$ Гц для измерения параметров резистора и катушки индуктивности и $f = 2000$ Гц для - конденсатора. Измерителем мощности и фазы измерьте значение тока I его фазу φ для резистора, катушки индуктивности и ёмкости. Результаты занесите в таблицу 1.

Таблица. 1

Элемент цепи	f	U_1	I	φ_1	Z	Определяемый Параметр	
	Гц	В	А	Град	Ом		
Резистор	200					R=	
Катушка индуктивности	200					$L_K =$	$R_K =$
Конденсатор	2000					C=	

2. Экспериментальные исследования установившихся гармонических процессов в цепях с элементами RL и RC

2.1. Для измерения входного комплексного сопротивления Z цепей с элементами RL и RC необходимо воспользоваться комбинированным прибором измерителя мощности и фазы (ИМФ1). Для этого собрать схему по рис. 15. В качестве сопротивления Z соберите RL цепь. Регуляторы генератора установить в положения, обеспечивающие на выходе гармонический сигнал напряжением $U_1 = 10$ В (измеритель мощности и фазы (ИМФ 1) установить в положение U_1) при частоте $f = 200$ Гц. Измерителем мощности и фазы измерить значение тока I его фазу φ для RL цепи. Меняя частоту звукового генератора заполните таблицу 2.

Таблица 2

f (Гц)		200	1000	5000
ω (рад/с)				
$\dot{I}(\omega)$	расчет			
	опыт			
$Z_{BX}(\omega)$	расчет			
	опыт			
$\psi_{BX}(\omega)$	расчет			
	опыт			

2.2. В качестве сопротивления Z соберите RL цепь. Проведите аналогичные измерения. Данные занесите в таблицу. Сравните полученные практические результаты с данными расчета.

2.3. Собрать схему по рис. 16. В качестве Z_1 подключите L, а в качестве Z_2 – резистор R. Устанавливая частоту генератора $f = 200, 500, 1000$ и 5000 Гц и амплитуду $U_1 = 10$ В измерить с помощью измерителя мощности и фазы комплекс действующего значения напряжения $\dot{U}_2 = U_{v2} e^{j\varphi_2}$. Результаты измерений занести в табл. 3. Сравните полученные практические результаты с данными расчета.

Таблица 3

f (Гц)		200	1000	5000
ω (рад/с)				
U_2	расчет			
	опыт			
$K(\omega)$	расчет			
	опыт			
$\varphi(\omega)$	расчет			
	опыт			
$20\lg K(\omega)$	расчет			
	опыт			

2.4. Проведите аналогичные измерения, выбирая в качестве элементов Z_1 и Z_2 элементы, изображенные на рис. 14б и 14в. Результаты измерений занести в табл. 3. Сравните полученные практические результаты с данными расчета.

2.5. По данным проведенных экспериментов построить графики входных частотных характеристик модуля и угла входного сопротивления $Z_{BX}(\omega)$ и $\psi_{BX}(\omega)$, АЧХ - $K(\omega)$ и ЛАЧХ - $20\lg K(\omega)$ и ФЧХ - $\varphi(\omega)$ в тех же осях, что и теоретические расчеты

2.6. Построить векторные диаграммы токов и напряжений по экспериментальным данным, снятым для схемы рис. 14,а для частоты $f = 200$ Гц, а для схемы рис. 14,б - для частоты $f = 1000$ Гц, проверить первый и второй законы Кирхгофа в комплексной форме.